Teoría – Tema 3

Teoría - 12 - Teorema de Lagrange

Teorema del valor medio de Lagrange (o de los incrementos finitos)

El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange, para la condición $f(a)=f(b)$.

Si se cumple la igualdad $f(a)=f(b)$, la recta que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$ es una recta horizontal (pendiente 0). Y el valor $c\in(a,b)$ que satisface el Teorema de Rolle cumple $f'(c)=0$. Es decir, la pendiente de la recta tangente a la función en $c\in(a,b)$ es paralela a la recta horizontal que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$.

Para el caso general $f(a)\neq f(b)$ se sigue cumpliendo la **igualdad de las pendientes**, con rectas que ya no serán paralelas al eje horizontal OX.

Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) $\rightarrow$ $\exists c\in(a,b)/f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostración: Partimos de la función auxiliar $g(x)=f(x)\cdot(b-a)-x\cdot[f(b)-f(a)]$. Esta función cumple las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$. Es decir:

- $g(x)$ es continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas en ese intervalo.
- $g(x)$ es continua en (a,b) por ser diferencia de funciones derivables en ese intervalo.
- $g(a)=g(b)=0$

Por lo tanto, sabemos que $\exists c\in(a,b)/g'(c)=0$ $\rightarrow$ $g'(c)=f'(c)\cdot(b-a)-[f(b)-f(a)]=0$. Y podemos expresar la siguiente igualdad:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tal y como queríamos demostrar. Si recordamos de la definición de derivada, la expresión que hemos obtenido para $f'(c)$ es el **incremento medio** (o tasa de variación media TVM) de la función en el intervalo $[a,b]$.

Si vemos $b=a+h \rightarrow f(b)=f(a+h) \rightarrow f'(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ → Nos lleva a la definición de derivada (variación instantánea) cuando el incremento $h \rightarrow 0$.

Ejemplo 1 resuelto

Comprobar que $f(x)=x^2+x+1$ **cumple las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo** $[1,4]$ **y obtener el valor** $c \in (a,b)$ **que predice el Teorema.**

En efecto, la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica. En particular, será continua en el intervalo $[1,4]$ y derivable en $(1,4)$.

$$f(1)=3 \quad , \quad f(4)=21 \quad \rightarrow \quad \frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{21-3}{4-1}=\frac{18}{3}=6$$

Por el Teorema de Lagrange sabemos que $\exists c \in (1,4) / f'(c)=6$. Es decir:

$$f'(x)=2x+1 \quad \rightarrow \quad f'(c)=2c+1 \quad \rightarrow \quad f'(c)=6 \quad \rightarrow \quad 2c+1=6 \quad \rightarrow \quad c=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{2} \in (1,4)$$

El Teorema de Lagrange también es utilizado en la **demostración de desigualdades entre funciones**.

Ejemplo 2 resuelto

Demostrar que $\ln(1+x)<x \, , \; \forall x>0$ **.**

Partimos de la función $f(x)=\ln(1+x)$ en el intervalo cerrado $[0,x]$, siendo x un valor real arbitrario y positivo.

La función $f(x)$ es continua en $[0,x]$ y derivable en $(0,x)$, por lo que podemos aplicar el Teorema del valor medio → $\exists c \in (0,x) / f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{1+c}=\ln(1+x)$$

Si $c \in (0,x) \quad \rightarrow \quad 0<c<x \quad \rightarrow \quad 1<1+c<1+x \quad \rightarrow \quad 1>\frac{1}{1+c}>\frac{1}{1+x} \quad \rightarrow \quad x>\frac{x}{1+c}>\frac{x}{1+x}$

Y llevando esta desigualdad al resultado $\frac{x}{1+c}=\ln(1+x)$ obtenemos:

$\frac{x}{1+c}=\ln(1+x) \quad \rightarrow \quad x>\ln(1+x)$, como queríamos demostrar.