

Problemas – Tema 3

CCSS Problemas resueltos - 1 - método de Gauss y notación matricial

1. Resuelve
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Escribimos la notación matricial del sistema y aplicamos Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - 2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & -1 & | & -6 \\ 3 & -2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow F'_3 = F_3 - 3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & -1 & | & -6 \\ 0 & -5 & -1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

La tercera ecuación es proporcional a la segunda, por lo tanto podemos obviar una de las dos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & -1 & | & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tras aplicar Gauss llegamos a un sistema de rango 2}$$

Sistema Compatible Indeterminado $\rightarrow$ Infinitas soluciones $\rightarrow$ Tomamos como parámetro $x = k$

$$\begin{cases} y + z = 3 - k \\ -5y - z = -6 \end{cases} \rightarrow \text{Sumamos ambas ecuaciones} \rightarrow -4y = -3 - k \rightarrow y = \frac{3+k}{4}$$

Obtenemos el valor de z de la segunda ecuación:

$$z = 6 - 5y \rightarrow z = 6 - \frac{5(3+k)}{4} \rightarrow z = \frac{9-5k}{4}$$

2. Resuelve
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Aplico reducción de la tercera ecuación con la primera $\rightarrow \begin{array}{r} -3x - 3y + 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ \hline -y + 4z = -2 \end{array}$

Y reduzco la tercera ecuación con la segunda $\rightarrow \begin{array}{r} -5x - 5y + 5z = -5 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ \hline -2y + 9z = -3 \end{array}$

Obteniendo un nuevo sistema con la tercera ecuación de partida y las otras dos ecuaciones reducidas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

De la segunda nueva ecuación, despejo el valor de la incógnita $y = 4z + 2$.

Y sustituyo este valor en las otras dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 4z + 2 - z = 1 \\ -2(4z + 2) + 9z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3z = -1 \\ -4 + z = -3 \end{cases} \rightarrow z = 1, \quad x = -4, \quad y = 6$$

3. Resuelve
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

La 1ª ecuación queda igual: $F'_1 = F_1$

La 2ª ecuación nueva será: $F'_2 = -2F_1 + F_2$

La 3ª ecuación nueva será: $F'_3 = -F_1 + F_3$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 6z = 7 \\ -2y = -2 \end{cases}$$

De la 3ª ecuación obtenemos $y = 1$. Sustituimos este valor en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 1 + z = 1 \\ 1 - 6z = 7 \end{cases}$$

De donde $z = -1$ y $x = 1$.

4. Resuelve
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $y = 2 - x$

Sustituimos en las otras dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned} 2 - x + z &= 3 \\ x - 2 + x - z &= 5 \end{aligned}$$

De la primera ecuación podemos obtener el valor de z en función de x :

$$z = 3 - 2 + x \rightarrow z = 1 + x$$

Y sustituir en la última ecuación este valor de z :

$$x - 2 + x - 1 - x = 5$$

$$x - 3 = 5$$

$$x = 8$$

Finalmente:

$$8 + y = 2 \rightarrow y = -6$$

$$-6 + z = 3 \rightarrow z = 9$$

5. Resuelve aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 7y + 7z = 1 \\ -2x + 4y + 5z = -7 \end{cases}$$

Dejamos la primera ecuación tal cual: F_1

La nueva segunda ecuación será: $F'_2 = F_2 - 2 \cdot F_1$

La nueva tercera ecuación será: $F'_3 = F_1 + F_3$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3 \\ 3y + z = -5 \\ 6y + 8z = -4 \end{cases}$$

A la tercer ecuación le restamos el doble de la segunda: $F'_3 = F_3 - 2 \cdot F_2$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3 \\ 3y + z = -5 \\ 6z = 6 \end{cases}$$

De la tercera ecuación obtenemos directamente el valor $z = 1$ y podemos ir sustituyendo, en cascada, en el resto de ecuaciones.

$$3y + 1 = -5 \rightarrow y = -2$$

$$2x - 4 + 3 = 3 \rightarrow x = 2$$

6. Resuelve aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ 4x + y - z = \frac{13}{6} \\ 2x - y + 3z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$F'_2 = F_2 - 4F_1 \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ 0 + 9y - 13z = \frac{1}{6} \\ 2x - y + 3z = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow F'_3 = F_3 - 2F_1 \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ 0 + 9y - 13z = \frac{1}{6} \\ 0 + 3y - 3z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F'_3 = F_2 - 3F_3 \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ 0 + 9y - 13z = \frac{1}{6} \\ 0 + 0 - 4z = \frac{-4}{3} \end{cases} \rightarrow \text{de la tercera ecuación} \rightarrow -4z = \frac{-4}{3} \rightarrow z = \frac{1}{3}$$

De la segunda ecuación $\rightarrow 9y - 13z = \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{1}{2}$

De la primera ecuación $\rightarrow x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$