Ejercicios tipo Selectividad sobre programación lineal.

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach	3. Sistemas y programación lineal	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

EJERCICIO 1

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{Bmatrix} 5x + y \geq 5 \\ 3x - 2y \leq 4 \\ \dfrac{x}{2} - y > 0 \end{Bmatrix}$$

Representamos la recta asociada a cada inecuación, obteniendo un par de punto de la recta y la zona del plano que satisface cada desigualdad.

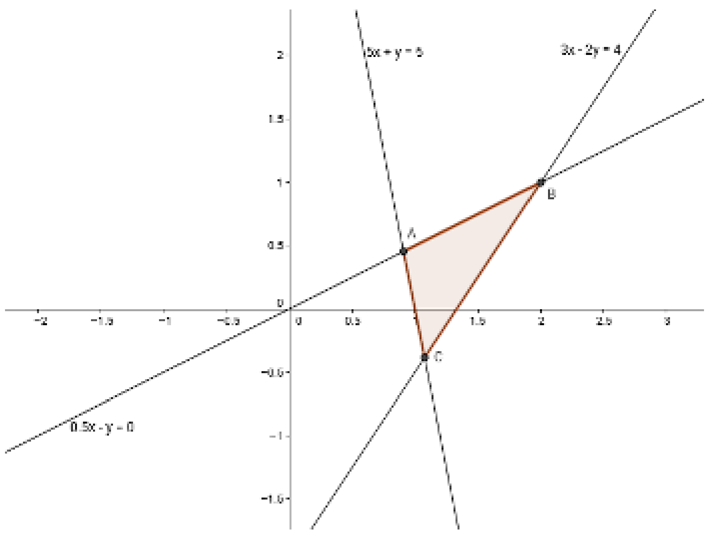
- Desigualdad: $5x + y \geq 5 \rightarrow$ Recta: $5x + y = 5 \rightarrow$ Puntos de la recta $(0{,}5)$, $(2,-5)$

  La zona del plano que contiene al punto $(0{,}0)$ no cumple la desigualdad.
- Desigualdad: $3x - 2y \leq 4 \rightarrow$ Recta: $3x - 2y = 4 \rightarrow$ Puntos de la recta $(0,-2)$, $(2{,}1)$

  La zona del plano que contiene al punto $(0{,}0)$ cumple la desigualdad.
- Desigualdad: $\frac{x}{2} - y > 0 \rightarrow$ Recta: $\frac{x}{2} - y = 0 \rightarrow$ Puntos de la recta $(0{,}0)$, $(2{,}1)$

  La zona del plano que contiene al punto $(5{,}0)$ cumple la desigualdad.

Representamos las tres rectas sobre los mismo ejes, siendo la solución del sistema de partida la zona del plano delimitada por las rectas.



Si las rectas se cortan, obtendremos los puntos de corte y decidiremos si estos puntos de corte son solución del sistema de inecuaciones.

- El punto A se obtiene como punto de corte de las rectas $5x + y = 5, \frac{x}{2} - y = 0$. Forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, de solución única.

  $\begin{Bmatrix} 5x + y = 5 \\ \frac{x}{2} - y = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Sumamos ambas ecuaciones $\rightarrow \frac{11x}{2} = 5 \rightarrow x = \frac{10}{11} \rightarrow y = \frac{5}{11}$

- El punto B se obtiene como punto de corte de las rectas $3x - 2y = 4, \frac{x}{2} - y = 0$. Forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, de solución única.

  $\begin{Bmatrix} 3x - 2y = 4 \\ \frac{x}{2} - y = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x - 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Restamos $\rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1$

- El punto C se obtiene como punto de corte de las rectas $5x + y = 5$, $3x - 2y = 4$. Forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, de solución única.

  $\begin{Bmatrix} 3x - 2y = 4 \\ 5x + y = 5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x - 2y = 4 \\ 10x + 2y = 10 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Sumamos $\rightarrow 13x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{13} \rightarrow y = \frac{-5}{13}$

El vértice $C(\frac{14}{13}, -\frac{5}{13})$ sí pertenece a la solución, ya que es intersección de dos rectas que cuya desigualdad asociada incluye el signo igual.

Los puntos $A(\frac{10}{11}, \frac{5}{11})$ y $B(2,1)$ no pertenecen a la solución, porque al menos una de las rectas que lo forman tienen asociada una desigualdad sin el signo igual.

Por idéntica razón, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ pertenecen a la solución, excluyendo como ya hemos razonado los vértices A y B.

EJERCICIO 2

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{Bmatrix} x+2y-1 \geqslant 0 \\ x-3y-6>0 \\ x+y \leq 5 \end{Bmatrix}$$

Representamos la recta asociada a cada inecuación.

- $x+2y-1 \geq 0 \rightarrow x+2y-1=0 \rightarrow$ Puntos $(1{,}0)$, $(3,-1)$

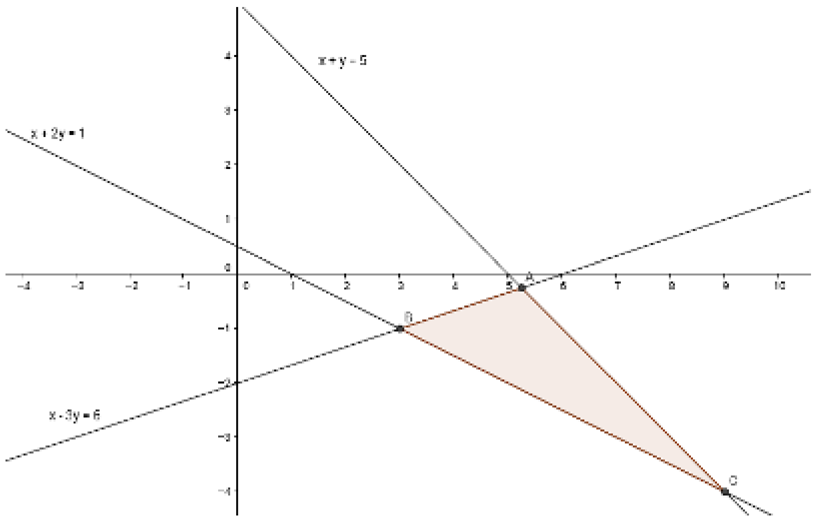
  La zona del plano que contiene a$(5{,}0)$cumple la desigualdad.

- $x-3y-6>0 \rightarrow x-3y-6=0 \rightarrow$ Puntos $(0,-2)$, $(3,-1)$

  La zona del plano que contiene a$(0{,}0)$no cumple la desigualdad.

- $x+y \leq 5 \rightarrow x+y=5 \rightarrow$ Puntos $(0{,}5)$, $(5{,}0)$

  La zona del plano que contiene a$(0{,}0)$cumple la desigualdad.



El punto A se obtiene como intersección de las rectas que forman el siguiente sistema:

$\begin{Bmatrix} x+y=5 \\ x-3y=6 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Restamos $\rightarrow 4y=-1 \rightarrow y=\frac{-1}{4} \rightarrow x=\frac{21}{4}$

El punto B se obtiene como intersección de:

$\begin{Bmatrix} x+2y=1 \\ x-3y=6 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Restamos $\rightarrow 5y=-5 \rightarrow y=-1 \rightarrow x=3$

El punto C se obtiene como intersección de:

$\begin{Bmatrix} x+2y=1 \\ x+y=5 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Restamos $\rightarrow y=-4 \rightarrow x=9$

El segmento $\overline{CB}$ es solución del sistema de inecuaciones de partida, salvo en el punto $B(3,-1)$. El segmento $\overline{CA}$ es solución del sistema de inecuaciones de partida, salvo en el punto $A(\frac{-1}{4},\frac{21}{4})$.

El segmento $\overline{AB}$ no es solución, al pertenecer a la recta $x-3y-6=0$, que está asociada a una desigualdad que no contiene al signo igual.

EJERCICIO 3

Las restricciones de pesca de un país obligan a una empresa a pescar como máximo 2 toneladas de merluza y 2 toneladas de rape. Además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3 toneladas.

Si el precio de la merluza es de 6€/kg y el precio del rape es de 9€/kg, ¿qué cantidades debe pescar la empresa para obtener el máximo beneficio?

Es muy útil ilustrar los datos del enunciado en una tabla que muestre explícitamente las variables de nuestro problema.

	nº toneladas	Precio por tonelada (€)	Beneficio
Tipo pescado: merluza	x	6.000	6.000·x
Tipo pescado: rape	y	9.000	9.000·y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar: beneficio de la merluza más el beneficio del rape.

$f(x, y) = 6000x + 9000y$

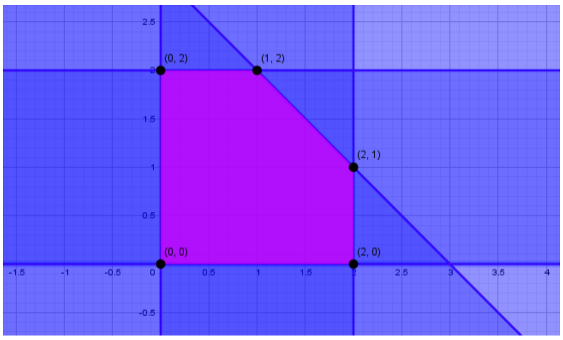
Restricciones del enunciado (leer con calma el enunciado).

- Pescar 2 toneladas de merluza como máximo $\rightarrow x \leq 2$
- Pescar 2 toneladas de rape como máximo $\rightarrow y \leq 2$
- La pesca total no puede superar las 3 toneladas $\rightarrow x + y \leq 3$
- Además, la cantidad de pescado de cada tipo nunca puede ser negativa $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \rightarrow$ **Estas dos condiciones no suelen aparecer de manera explícita en este tipo de enunciados, pero es muy importante aplicarlas para que la región factible sea acotada. Se conocen como condición de positividad de las variables**.

En consecuencia, tenemos un sistema de cinco inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

La imagen de la derecha muestra una región factible convexa, con los vértices y los lados pertenecientes a la solución final (ya que todas las inecuaciones poseen el signo igual).



Obtenemos la imagen de $f(x, y) = 6000x + 9000y$ en los cinco vértices de la región factible.

$$f(0,0) = 0 + 0 = 0$$
$$f(2,0) = 12.000$$
$$f(0,2) = 18.000$$
$$f(1,2) = 24.000$$
$$f(2,1) = 21.000$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, si la función objetivo posee un máximo en la región convexa que la delimita, el máximo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible acotada.

Por lo tanto, el **punto** $(1, 2)$ **maximiza** la función objetivo con una **imagen igual a** $24.000€$ **(solución única)**. **La empresa debe pescar 1 tonelada de merluza y 2 toneladas de rape para maximizar beneficios**.

EJERCICIO 4

Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 24 de vitamina C cada día.

Existen en el mercado dos productos P1 y P2, que en cada comprimido contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

- **Un comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.**
- **Un comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A, 1 unidad de vitamina B y 3 unidades de vitamina C.**

Cada comprimido P1 cuesta 10 céntimos y cada comprimido P2 cuesta 5 céntimos.

¿Cuántos comprimidos de cada tipo debe tomar al día para obtener el nivel de vitaminas indicado al menor coste económico?

Las variables serán el número de comprimidos que debe tomar de cada tipo al día.

La función objetivo es el coste económico: coste de los comprimidos P1 más coste de los comprimidos P2.

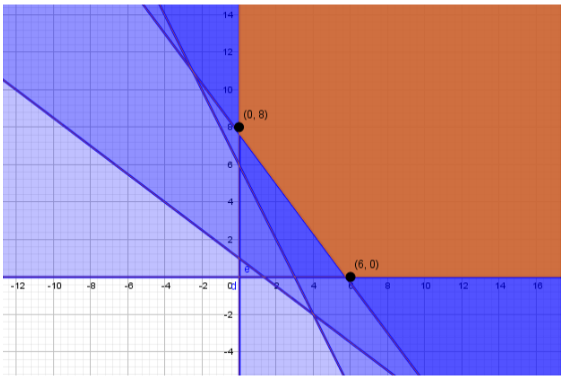
$f(x, y) = 10x + 5y$

	nº comprimidos al día	Precio de cada comprimido (céntimos)	Coste
Comprimido P1	X	10	10·x
Comprimido P2	Y	5	5·y

Conjunto de restricciones:

- Al menos 4 unidades de vitamina A. Como cada comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A y cada comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A $\rightarrow 3x + 4y \geq 4$
- Al menos 6 unidades de vitamina B. Como cada comprimido de P1 contiene 2 unidades de vitamina B y cada comprimido de P2 contiene 1 unidad de vitamina B $\rightarrow 2x + y \geq 6$
- Al menos 24 unidades de vitamina C. Como cada comprimido de P1 contiene 4 unidades de vitamina C y cada comprimido de P2 contiene 3 unidades de vitamina C $\rightarrow 4x + 3y \geq 24$
- Además, el número de comprimidos de cada tipo no puede ser negativo: condición de no negatividad de las variables $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0$

En consecuencia, tenemos un sistema de cinco inecuaciones lineales de dos incógnitas.



Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

La solución del sistema de inecuaciones lineales de la derecha no está totalmente delimitada por los lados de un polígono. Diremos que **la solución no está acotada**.

La región factible es convexa y los vértices y los lados pertenecen a la solución, por aparecer el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de $f(x, y) = 10x + 5y$ en los dos vértices de la región factible.

$$f(6,0) = 6 \cdot 10 + 0 = 60$$
$$f(0,8) = 0 + 8 \cdot 5 = 40$$

Aunque la región factible no es acotada, **por el Teorema fundamental de la programación lineal** podemos afirmar que, si la función objetivo posee un mínimo en la región convexa que la delimita, el mínimo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

El vértice que genera la imagen más pequeña es el punto $(0,8)$, que da lugar a una imagen de 40 céntimos.

Como el punto $(0, 8)$ pertenece a un lado vertical que crece hacia arriba hacia el infinito, tomamos otro punto de ese lado para verificar si también es mínimo.

Por ejemplo, tomamos el punto $(0,10) \rightarrow f(0,10) = 0 + 50 \rightarrow$ La imagen que genera $(0,10)$ es mayor que la imagen que genera $(0,8)$.

Por lo tanto, el punto $(0,8)$ es la solución única que minimiza el coste del problema.

El atleta debe tomar 0 comprimidos de tipo P1 y 8 comprimidos tipo P2 para minimizar costes y alcanzar los niveles mínimos de vitaminas requeridos (solución única).

EJERCICIO 5

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70g de algodón y 20g de poliéster. Y para cada camisa estampada necesita 60g de algodón y 10 g de poliéster.

La empresa dispone para ello de 4200g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y, además, el número de estampadas debe ser al menos igual al doble del número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Las variables serán el número de camisetas que deben fabricarse.

	nº camisetas fabricadas	Beneficio por cada camiseta (€)	Beneficio
Camiseta lisa	X	5	5·x
Camiseta estampada	Y	4	4·y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar.

$f(x, y) = 5x + 4y$

Conjunto de restricciones:

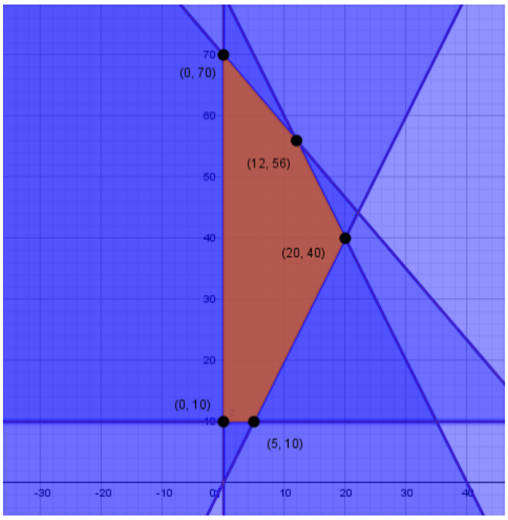
- Cada camiseta lisa contiene 70g de algodón y cada camiseta estampada 60g de algodón. Y la cantidad máxima de algodón que posee la empresa es 4200g. Esta cantidad máxima es un límite superior de material $\rightarrow 70x + 60y \leq 4200$
- Cada camiseta lisa contiene 20g de poliéster y cada camiseta estampada 10g de poliéster. Y la cantidad máxima de poliéster que posee la empresa es 800g. Esta cantidad máxima es un nuevo límite de material disponible $\rightarrow 20x + 10y \leq 800$
- Deben fabricarse al menos 10 camisetas estampadas $\rightarrow y \geq 10$
- El número de estampadas debe ser al menos igual al doble de lisas $\rightarrow y \geq 2x$
- Como es costumbre en estos ejercicios, el número de camisetas de cada tipo no pueden ser negativas $\rightarrow x \geq 0$, $y \geq 0$

Poseemos un sistema de seis inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Debemos indicar si los vértices y los lados pertenecen a la solución final.

La región factible es convexa y todos los lados y los vértices pertenecen a la solución por aparecer el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de $f(x, y) = 5x + 4y$ en los cinco vértices de la región factible.



$$f(5,10) = 25 + 40 = 65$$
$$f(0,10) = 0 + 40 = 40$$
$$f(0,70) = 0 + 280 = 280$$
$$f(20,40) = 100 + 160 = 260$$
$$f(12,56) = 60 + 224 = 284$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, si la función objetivo posee un máximo en la región convexa que la delimita, el máximo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible. Al estar acotada la solución, sabemos que el problema de programación lineal tendrá solución.

El beneficio máximo es de 284€ si fabrica 12 camisetas lisas y 56 estampadas.

EJERCICIO 6

Sea la región del plano limitada por las inecuaciones:

$$\mathbf{3x + y \geq 7}$$
$$\mathbf{3x - 2y \leq 4}$$

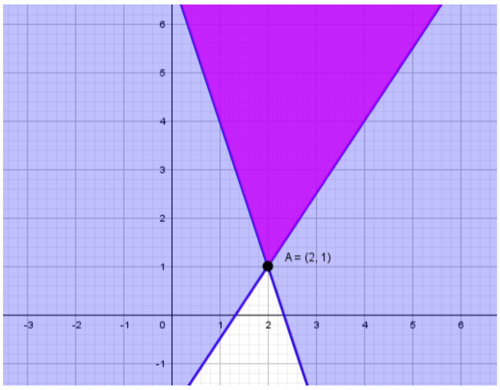
Sea la función objetivo:

$$\boldsymbol{f(x, y) = 3x + y}$$

Obtener su máximo y su mínimo en la región factible.

Dibujamos la región factible. Es no acotada.

¡Ojo al dato de no acotada! Tras obtener la imagen que genera el punto A, deberemos tomar un punto de cada uno de los lados infinitos y comprobar si aumentan o disminuyen la imagen generada por A en la función objetivo.



Los vértices de la región factible se obtienen planteando sistemas 2x2 con las dos rectas que forman el vértice.

La imagen de $f(x, y) = 3x + y$ en el vértice A(2,1) resulta:

$$f(2,1) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

¿Es un máximo? ¿Es un mínimo? ¿Es la única solución? En el vértice A confluyen dos lados infinitos. Tomamos un punto de cada lado.

$(4,4) \rightarrow f(4,4) = 3 \cdot 4 + 4 = 16$

$(0,7) \rightarrow f(0,7) = 0 + 7 = 7 \rightarrow$ Iguala el valor de $f(2,1)$

Consecuencia: **todos los puntos del lado de la región factible que pasa por A y sube hacia la izquierda, minimizan a la función objetivo (infinitos mínimos)**.

No hay máximos, ya que los puntos del lado que pasa por A y sube hacia la derecha, van tomando imágenes cada vez más grandes.

EJERCICIO 7

¿Pertenecen los puntos $P(1,2)$ y $Q(2,5)$ al conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones $\begin{Bmatrix} 2x + y > 4 \\ x - 2y < 8 \end{Bmatrix}$?

Si no lo pide el enunciado, podemos resolver sin necesidad de dibujar la solución gráfica. Podemos comprobar, para cada punto, si cumple ambas inecuaciones.

$P(1,2) \to \begin{Bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \to 4 > 4 \to Absurdo \\ 1 - 2 \cdot 2 \to -3 < 8 \to Verdadero \end{Bmatrix} \to$ el punto $P(1,2)$ no pertenece a la solución.

$Q(2,5) \to \begin{Bmatrix} 2 \cdot 2 + 5 \to 9 > 4 \to Verdadero \\ 2 - 2 \cdot 5 \to -8 < 8 \to Verdadero \end{Bmatrix} \to$ el punto $Q(2,5)$ sí pertenece a la solución.

EJERCICIO 8

Indica la posición de los puntos $P(1,2)$ y $Q(5,1)$ en relación con la región solución que satisface el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} x+2y\le 12 \\ 2x+y\ge 4 \\ x-2y\le 6 \\ x-y\ge 0 \\ x\le 8 \end{matrix}\right\}$$

Si el punto es exterior, indica qué desigualdades cumple.

$$P(1,2)\rightarrow\left\{\begin{matrix} 1+2\cdot 2\le 12\rightarrow 5\le 12\rightarrow Verdadero \\ 2\cdot 1+2\ge 4\rightarrow 4\ge 4\rightarrow Verdadero(cumple\ signo\ igual) \\ 1-2\cdot 2\le 6\rightarrow -3\le 6\rightarrow Verdadero \\ 1-2\ge 0\rightarrow -1\ge 0\rightarrow Absurdo \\ 1\le 8\rightarrow Verdadero \end{matrix}\right\}\rightarrow P(1,2)\text{ punto exterior}$$

$$Q(5,1)\rightarrow\left\{\begin{matrix} 5+2\cdot 1\le 12\rightarrow 7\le 12\rightarrow Verdadero \\ 2\cdot 5+1\ge 4\rightarrow 11\ge 4\rightarrow Verdadero \\ 5-2\cdot 1\le 6\rightarrow 3\le 6\rightarrow Verdadero \\ 5-1\ge 0\rightarrow 4\ge 0\rightarrow Verdadero \\ 5\le 8\rightarrow Verdadero \end{matrix}\right\}\rightarrow Q(5,1)\text{ cumple desigualdades}$$

El punto $Q(5,1)$ cumple todas las desigualdades, aunque nunca cumple estrictamente el signo igual. Por lo tanto, el punto $Q(5,1)$ se encuentra en el interior de la región factible.

EJERCICIO 9

Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kg de pintura mate necesita 0,4kg de producto A y 0,6kg de producto B. Cada kg de pintura brillante necesita 0,2kg de producto A y 0,8kg de producto B.

La empresa posee un máximo de 200kg de producto A y un máximo de 500kg de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200kg de pintura mate y al menos 300kg de pintura brillante.

El beneficio por kg de pintura mate es de 4€ y el beneficio por kg de pintura brillante es de 5€. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá? ¿Con la solución óptima, sobra alguna cantidad de los productos A y B?

Las variables serán el número de kg que debe fabricar de pintura mate y brillante.

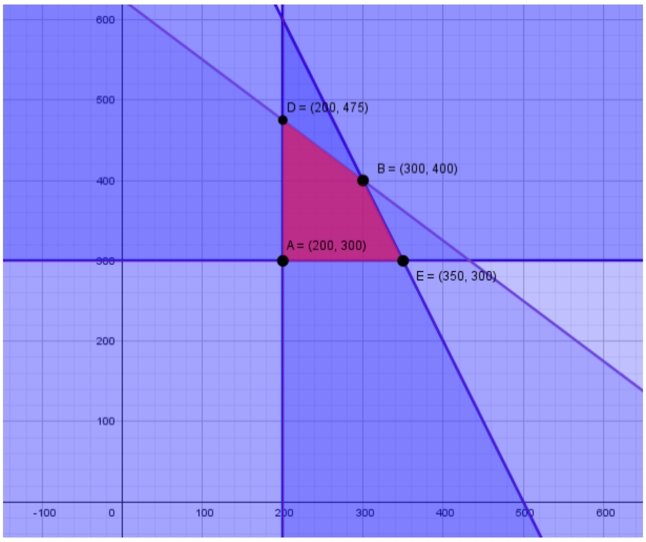
	Kg	Beneficio por cada kg (€)	Beneficio
Pintura mate	X	4	4·x
Pintura brillante	Y	5	5·y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar:

$$f(x,y) = 4x + 5y$$

Conjunto de restricciones:

- Cada kg mate posee 0,4kg de producto A y cada kg brillante posee 0,2kg de producto A. La cantidad máxima de A que posee la empresa es 200kg, por lo que existe un límite superior de material: $0{,}4x + 0{,}2y \leq 200$
- Cada kg mate posee 0,6kg de producto B y cada kg brillante posee 0,8kg de producto B. La cantidad máxima de B que posee la empresa es 500kg, por lo que tendremos otro límite superior de material: $0{,}6x + 0{,}8y \leq 500$
- Deben fabricarse al menos 200kg mate $\rightarrow x \geq 200$
- Deben fabricarse al menos 300kg brillante $\rightarrow y \geq 300$
- Como es costumbre en estos ejercicios, el número de kg mate y brillante no pueden ser negativos $\rightarrow x \geq 0,\, y \geq 0$. Aunque estas dos inecuaciones no aportan restricciones nuevas, ya que hemos indicado que al menos hay 200kg de mate y al menos 300kg de brillante.



Poseemos un sistema de cuatro inecuaciones lineales de dos incógnitas.

La región factible es acotada, por lo que sabemos que el problema de programación lineal tiene solución. Los lados y los vértices pertenecen a la región factible por aparecer el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de la función objetivo $f(x,y) = 4x + 5y$ en los vértices:

$f(200{,}300) = 4 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 2.300$

$f(350{,}300) = 4 \cdot 350 + 5 \cdot 300 = 2.900$

$f(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3.200$

$f(200{,}475) = 4 \cdot 200 + 5 \cdot 475 = 3.175$

El beneficio máximo es igual a $3.200€$ y se alcanza fabricando 300kg de pintura mate y 400kg de pintura brillante (solución única). Con esas condiciones óptimas:

- Se consumen $0{,}4 \cdot 300 + 0{,}2 \cdot 400 = 200kg$ de producto A → **No sobra producto A**.
- Se consumen $0{,}6 \cdot 300 + 0{,}8 \cdot 400 = 500kg$ de producto B → **No sobra producto B**.

EJERCICIO 10

a) Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$x + 2y \leq 13$

$x - y \leq 4$

$x - 2y \geq -7$

$x + y \geq 5$

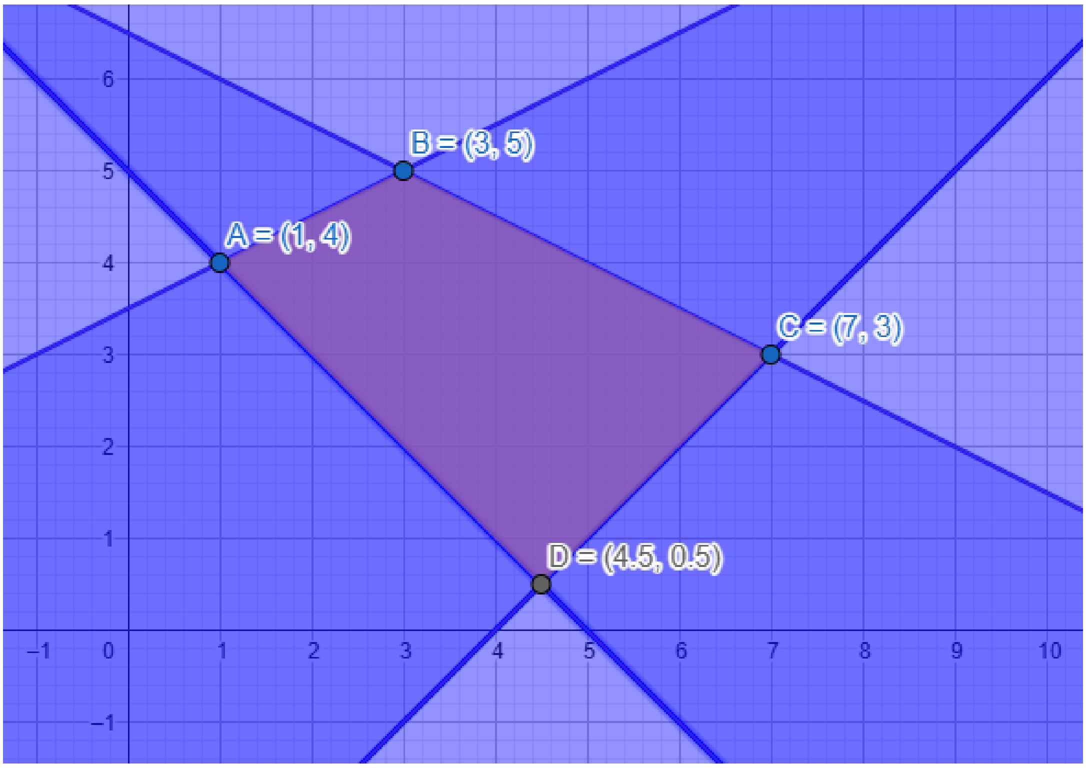
b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo:

$F(x, y) = x + y$

En la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Ya conocemos la forma de razonar para resolver cada inecuación: Dibujamos la recta asociada a la inecuación con ayuda de dos puntos de la recta. La recta divide el plano en dos mitades. Tomamos un punto que no pertenece a la recta y sustituimos las coordenadas de ese punto en la inecuación, para determinar que parte del plano satisface las condiciones de la inecuación.

Con ayuda de Geogebra, la región factible queda determinada por la siguiente superficie acotada y convexa. Los vértices son los cortes de los respectivos sistemas 2x2 formado por todas las parejas de rectas asociadas a las inecuaciones.



Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa, tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos $F(x, y) = x + y$ en cada vértice.

$F(1,4) = 1 + 4 = 5$

$F(3,5) = 3 + 5 = 8$

$F(7,3) = 7 + 3 = 10$

$F(4.5,0.5) = 4.5 + 0.5 = 5$

En el punto B(7,3) se alcanza la imagen más grande. Máximo de la función objetivo.

Los puntos A(1,4) y D(4.5,0.5) alcanzan la imagen más pequeña. Todos los puntos del segmento que une los puntos A y B minimizan la función objetivo.

EJERCICIO 11

Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros.

Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma? ¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

Identificamos variables:

x → número de bolsas tipo 1

y → número de bolsas tipo 2

La cantidad total de bocadillos no puede superar la cantidad de 120. Por lo tanto:

$2x + y \leq 120$

El número total de refrescos está acotado a 70 unidades. Es decir:

$x + y \leq 70$

Mientras que el número de piezas de fruta no puede superar las 110 unidades:

$x + 2y \leq 110$

Contamos, como de costumbre, con las condiciones de no negatividad:

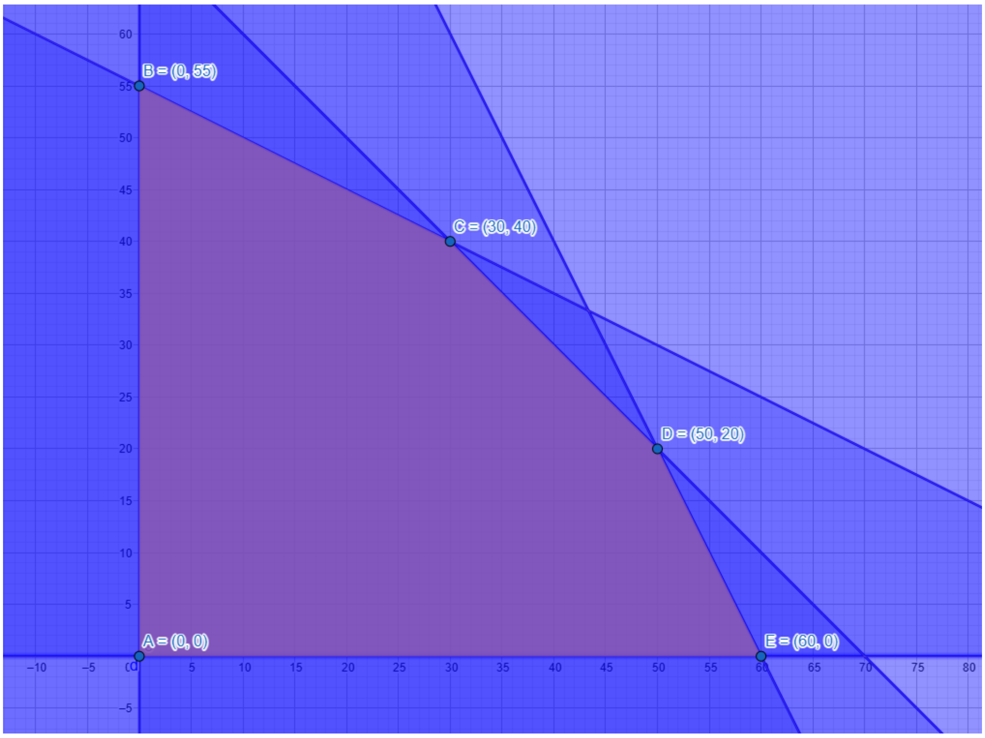
$x \geq 0$

$y \geq 0$

El dinero recogido por la venta íntegra de las bolsas es la función a maximizar. Cada bolsa tipo 1 se vende a 6 euros, y cada bolsa tipo 2 se vende a 5 euros.

$f(x,y) = 6x + 5y$

Con Geogebra, dibujamos la región factible.



Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa, tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos la función objetivo en cada vértice.

$f(x,y) = 6x + 5y$

$A(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$

$B(0,55) \rightarrow f(0,55) = 275$

$C(30,40) \rightarrow f(30,40) = 180 + 200 = 380$

$D(50,20) \rightarrow f(50,20) = 300 + 100 = 400$

$E(60,0) \rightarrow f(60,0) = 360$

La máxima ganancia económica se obtiene con la venta de 50 bocadillos de tipo 1 y 20 bocadillos de tipo 2. Siendo la ganancia de 400 euros.

No podemos vender 40 bolsas de cada tipo porque el punto (40,40) se encuentra fuera de la región factible.

Y no podemos obtener unas ventas de 410 euros porque hemos demostrado que el valor máximo de las ventas, en la región factible, es de 400 euros.

EJERCICIO 12

Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente.

La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, calcule las horas de funcionamiento de las cadenas A y B que minimizan el coste de producción de esos electrodomésticos.

La función objetivo que ofrece el coste de producción es:

$$f(x,y) = 1200x + 1500y$$

Siendo "x" el número de horas de funcionamiento de la cadena A. Siendo "y" el número de horas de funcionamiento de la cadena B.

El tiempo de funcionamiento de la cadena A está acotado superiormente, ya que no puede superar el doble de horas de la cadena B. Es decir:

$$x \leq 2y$$

El número de lavadoras que se fabrican es suma de las fabricadas por la cadena A y de las fabricadas por la cadena B. Ese número, debe ser mayor o igual que 400.

$$10x + 7y \geq 400$$

Igualmente, la suma de los frigoríficos de la cadena A y de la cadena B debe ser mayor o igual que 280.

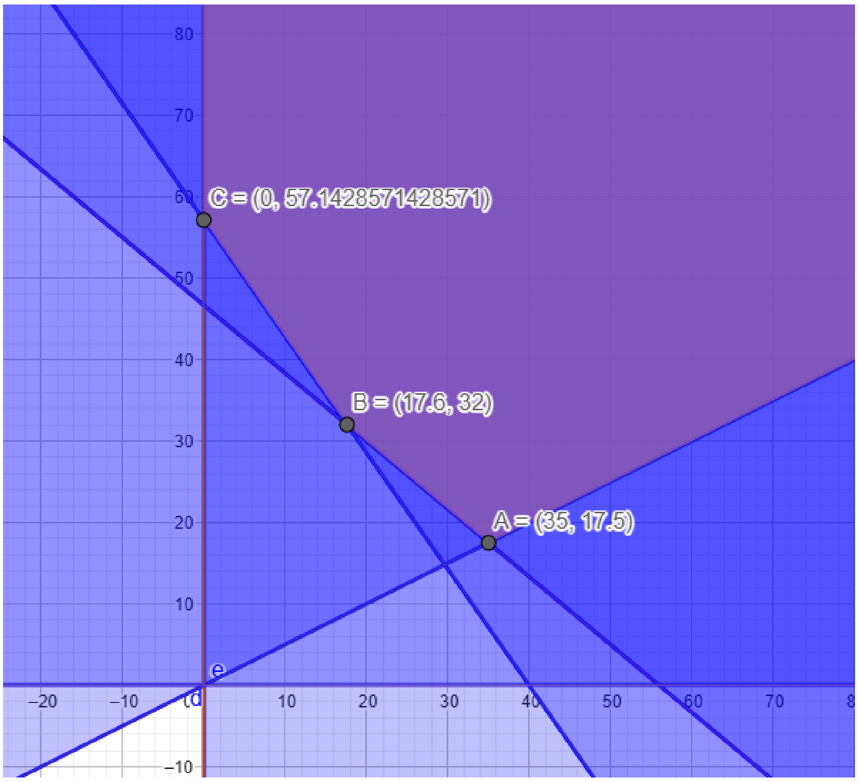
$$5x + 6y \geq 280$$

Además, consideramos las condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Dibujamos con Geogebra la región factible. Recuerda que, con cada inecuación, hay que dibujar la recta asociada y determinar la región del plano cumple la inecuación.



Aparecen tres vértices en la región convexa no acotada. Al ser no acotada, el Teorema Fundamental no nos confirma la existencia de solución en el problema de optimización.

Pero si la hay, tenemos garantizado que la solución aparecería en al menos uno de los vértices.

$$f(x, y) = 1200x + 1500y$$

A(35, 17.5) → f(35, 17.5) = 68250

B(17.6, 32) → f(17.6, 32) = 69120

C(0, 57.14) → f(0, 57.14) = 85714.28

El vértice A(35, 17.5) minimiza los costes de producción. Como es una región no acotada, cabe la posibilidad que la semirecta que parte de A y delimita un lateral de la región contenga infinitos puntos que también minimicen los costes de producción.

Ese lado pertenece a la recta x=2y. Por lo que un punto de esa recta es el (60,30):

(60, 30) → f(60, 30) = 117000

Esta cantidad supera claramente el valor 68250 euros, por lo que el vértice A mínima a nuestra función objetivo. La solución implica que la fábrica A funciona 35 horas, mientras que la fábrica B funciona 17.5 horas.

EJERCICIO 13

Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$x + 2y \geq 7$

$4x - y \geq 1$

$2x - y \leq 4$

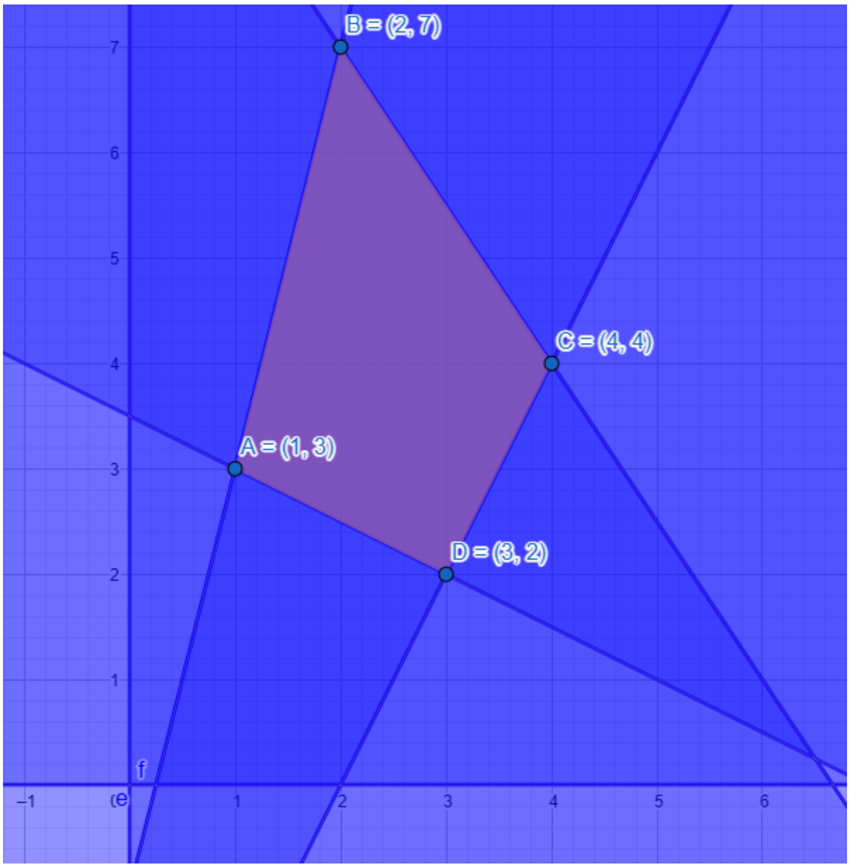
$3x + 2y \leq 20$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Dibujamos con Geogebra la región factible de las seis inecuaciones.



Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos la función objetivo en cada vértice.

A(1,3) → F(1,3) = 2·1+3 = 5

B(2,7) → F(2,7) = 2·2+7 = 11

C(4,4) → F(4,4) = 2·4+4 = 12

D(3,2) → F(3,2) = 2·3+2 = 8

El valor mínimo de la función objetivo es 5 y se alcanza en el vértice A(1,3).

EJERCICIO 14

Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra.

Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate.

Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1'5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja. Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigüe qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

Las incógnitas son los kilogramos a elaborar de Delicia Roja (x) y de Delicia negra (y). Si cocinamos x kilogramos de Delicia Roja e y kilogramos de Delicia Negra, estaremos gastando un total de 3x + 1y tarrinas de fresas. Por lo tanto:

$3x + y \leq 15$ (ya que tenemos un máximo de 15 tarrinas de fresas disponible).

De igual forma, estaremos gastando un total de 1x + 2y tarinas de chocolate. Por lo tanto:

$x + 2y \leq 10$ (porque contamos, como máximo, con 10 tarrinas de chocolate)

Debemos cocinar más de 1,5 kg de Delicia Negra. Es decir:

$y \geq 1{,}5$

La cantidad de Delicia Negra no puede superar al doble de Delicia Roja. Por lo tanto:

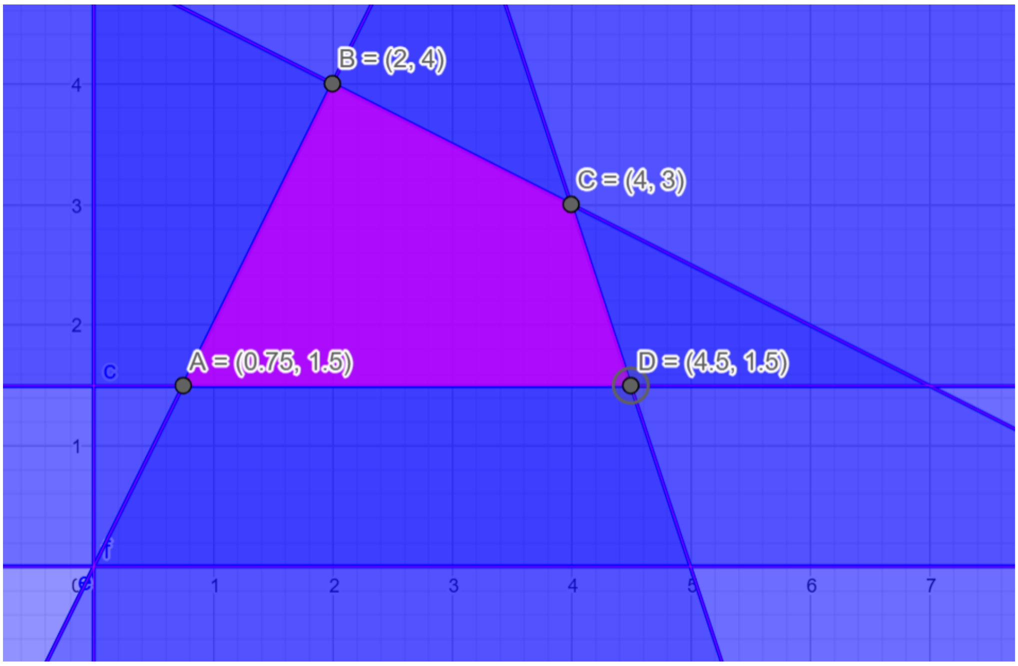
$y \leq 2x$

Añadimos las condiciones clásicas de no negatividad:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Y dibujamos con Geogebra la región factible solución.



Los vértices de la región factible se obtienen resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones de las rectas asociadas a las distintas inecuaciones.

$\begin{cases} y = 1.5 \\ y = 2x \end{cases}$ → A(3/4 , 3/2)

$\begin{cases} y = 2x \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ → B(2 , 4)

$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ → C(4 , 3)

$\begin{cases} y = 1.5 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ → D(9/2 , 3/2)

La función objetivo es la función beneficio. Por cada unidad de "x" (kg de Delicia Roja) se obtienen 3 euros, y por cada unidad de "y" (kg de Delicia Negra) 5 euros.

$$f(x, y) = 3x + 5y$$

Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos la función objetivo en cada vértice.

A → f(3/4, 3/2) = 9.75 euros

B → f(2, 4) = 26 euros

C → f(4, 3) = 27 euros

D → f(9/2 , 3/2) = 21 euros

El beneficio máximo se obtiene en el vértice C, con la elaboración de 4 kg de Delicia Roja y 3 kg de Delicia Negra.

EJERCICIO 15

Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate. Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue. Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue.

Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

1 tarta de chocolate requiere:

- 1kg bizcocho
- 2 kg crema de chocolate

1 tarta de chocolate y merengue requiere:

- 2 kg bizcocho
- 1 kg crema de chocolate
- 1 kg merengue

Llamaremos "x" al número de tartas de chocolate a cocinar.

Llamaremos "y" al número de tarta de chocolate y merengue totales.

Como la cantidad máxima de bizcocho es de 100 kg, tendremos la primera restricción:

$$x + 2y \leq 100$$

El máximo de crema de chocolate es de 80 kg, por lo tanto:

$$2x + y \leq 80$$

Y de merengue no podemos gastar más de los 46 kg que poseemos:

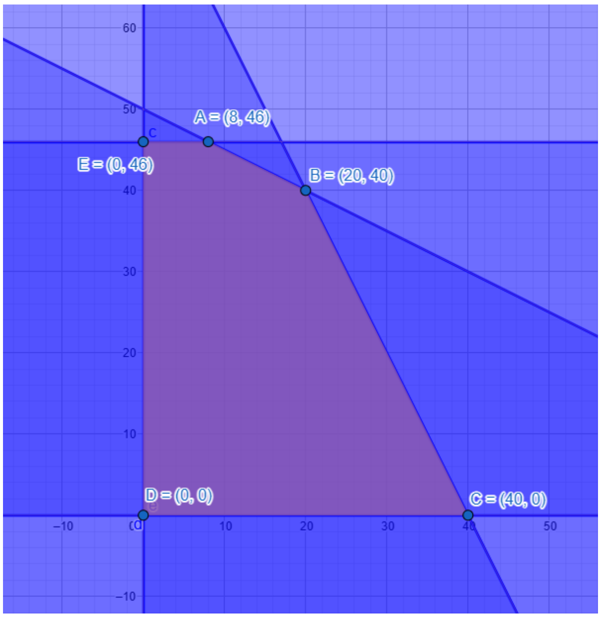
$$y \leq 46$$

Aplicamos las condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Con Geogebra dibujamos la región factible y obtenemos las intersecciones que forman los vértices.



Por cada kg de tarta de chocolate obtenemos 10 euros. Mientras que por cada kg de tarta de chocolate y merengue obtenemos 12 euros. La función objetivo es el beneficio de la venta de ambas tartas:

$$f(x,y) = 10x + 12y$$

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos garantiza solución en el problema de maximización en la región acotada y convexa. Y esta solución afecta, al menos, a uno de los vértices.

Evaluamos en cada vértice.

A → $f(8{,}46) = 80 + 552 = 632$

B → $f(20{,}40) = 200 + 480 = 680$

C → $f(40{,}0) = 400 + 0 = 400$

D → $f(0{,}0) = 0 + 0 = 0$

E → $f(0{,}46) = 0 + 552 = 552$

El máximo beneficio es de 680 euros, y se produce cuando se preparan 20 tartas de chocolate y 40 tartas de chocolate y merengue.

EJERCICIO 16

Se considera la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$x + y \leq 4$

$x - y \geq 2$

$x + 3y \geq 2$

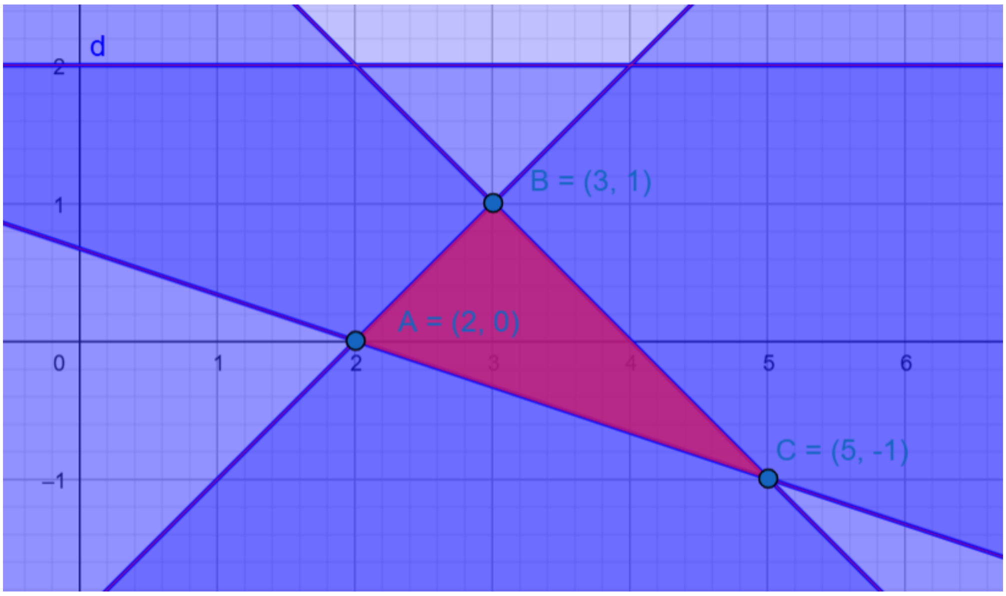
$y \leq 2$

a) Represéntela gráficamente y determine sus vértices.

b) Indique razonadamente si el punto (4, -0'75) pertenece a dicha región.

c) ¿En qué puntos de la región anterior la función F(x, y) = x + y alcanza los valores máximo y mínimo y cuáles son estos valores?

a) Con Geogebra representamos la región factible y los vértices:



b) Determinar a ojo si el punto (4, -0.75) pertenece a la región factible puede llevarnos fácilmente a error. Podemos responder de manera precisa sustituyendo las coordenadas del punto en las inecuaciones y comprobar si cumple todas las inecuaciones:

(4, -0.75)

$x + y \leq 4 \rightarrow 4 + 0 \leq 4 \rightarrow$ Verdadero

$x - y \geq 2 \rightarrow 4 - (-0.75) \geq 2 \rightarrow$ Verdadero

$x + 3y \geq 2 \rightarrow 4 - 2.25 \geq 2 \rightarrow$ **Falso (el punto no pertenece a la región factible)**

$y \leq 2 \rightarrow -0.75 \leq 2 \rightarrow$ Verdadero

c) Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos **F(x, y) = x + y :**

en cada vértice.

A(2,0) → F(2,0) = 2

B(3,1) → F(3,1) = 4

C(5,-1) → F(5,-1) = 4

Todos los puntos del segmento que une el vértice B con el vértice C maximiza la función objetivo. Alcanzándose el mínimo en el vértice A.

EJERCICIO 17

Consideremos el recinto definido por las siguientes desigualdades:

$7y \leq 15 + 3x$

$y \geq x - 3$

$3y \geq -x + 11$

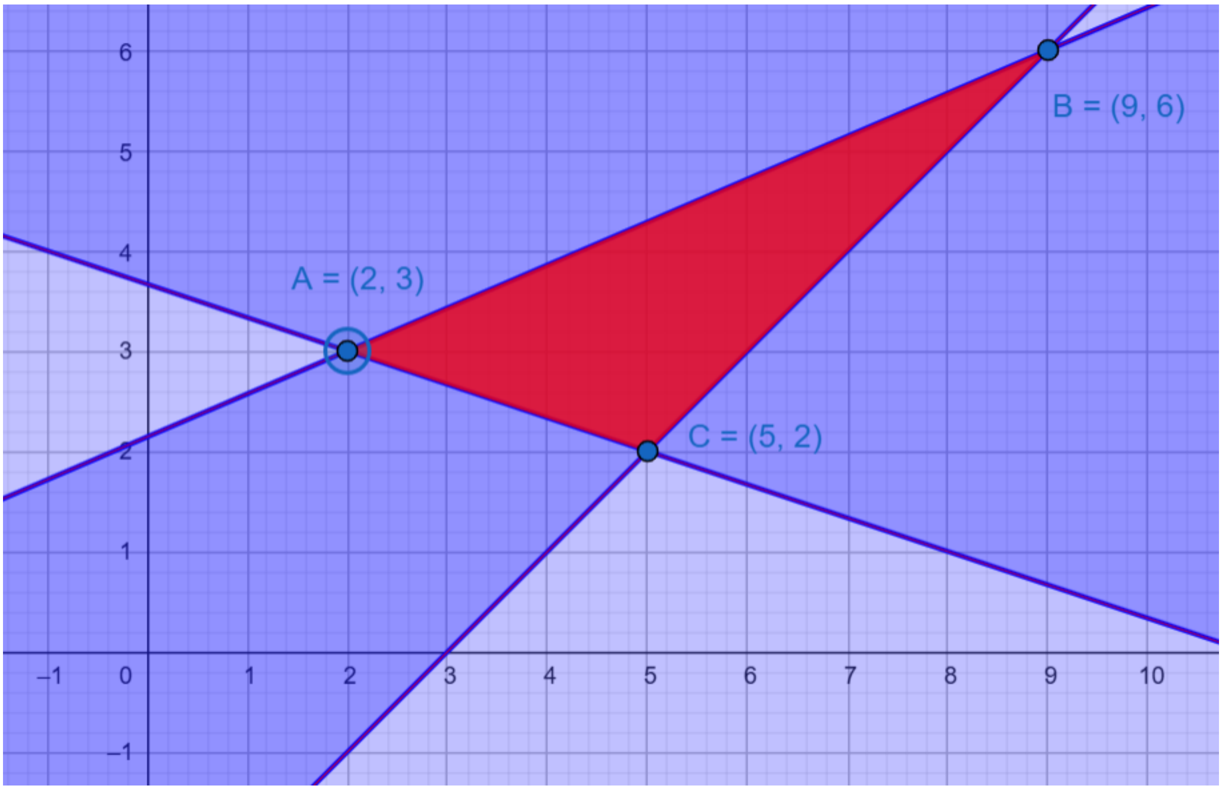
a) Represente gráficamente el recinto anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule en qué puntos se alcanzan los valores máximo y mínimo de la función:

$H(x, y) = 4x - y - 16$

restringida al anterior recinto y obtenga dichos valores.

a) Dibujamos con Geogebra la solución:



b) Por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el ejercicio de optimización de una función objetivo sobre una superficie acotada y convexa tiene solución en al menos uno de los vértices. Por lo tanto, evaluamos **$H(x, y) = 4x - y - 16$:**

A(2,3) → H(2,3) = 8-3-16 = -11

B(9,6) → H(9,6) = 36-6-16 = 14

C(5,2) → H(5,2) = 20-2-16 = 2

El máximo se alcanza en el vértice B(9,6) mientras que el mínimo aparece en el vértice A(2,3).

EJERCICIO 18

Se considera el recinto cuadrado de vértices (1, 0), (0, 1), (-1, 0) y (0, -1).

Indique en qué puntos del recinto se alcanzan el valor máximo de la función:

$F(x, y) = 3x + 2y + 7$

y el valor mínimo de la función:

$G(x, y) = x + y + 6$

calculando dichos valores.

El enunciado ya nos ofrece los vértices de una región acotada y convexa, por lo que el Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos garantiza que el problema de optimización se resuelve en al menos uno de los vértices.

Evaluamos F(x,y) en cada vértice:

$F(1,0)=3+0+7=10$

$F(0,1)=0+2+7=9$

$F(-1,0)=-3+0+7=4$

$F(0,-1)=0-2+7=5$

El máximo se alcanza en el vértice (1,0).

Evaluamos G(x,y) en cada vértice:

$G(1,0)=1+0+6=7$

$G(0,1)=0+1+6=7$

$G(-1,0)=-1+0+6=5$

$G(0,-1)=0-1+6=5$

Hay dos vértices que minimizan la función objetivo. Por lo tanto todos los puntos del segmento que une los vértices (-1,0) y (0,-1) son solución del problema de minimización.

EJERCICIO 19

Una empresa comercializa dos tipos de concéntralo de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7’5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B.

Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67’5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

1 kg de concentrado A necesita:

- 4,5kg de Colombia
- 3kg de Etiopía

1kg de concentrado B requiere:

- 7,5kg de Colombia
- 1,5kg de Costa Rica

Llamamos “x” al número de kg totales de A.

Llamamos “y” al número de kg totales de B.

De Colombia disponemos de 67,5kg como máximo:

$$4{,}5x + 7{,}5y \leq 67{,}5$$

De Etiopía contamos con 30kg como máximo:

$$3x \leq 30 \rightarrow x \leq 10$$

No podemos superar los 9kg de Costa Rica:

$$1{,}5y \leq 9 \rightarrow y \leq 6$$

Además, la cantidad de A debe ser mayor o igual que la mitad de B:

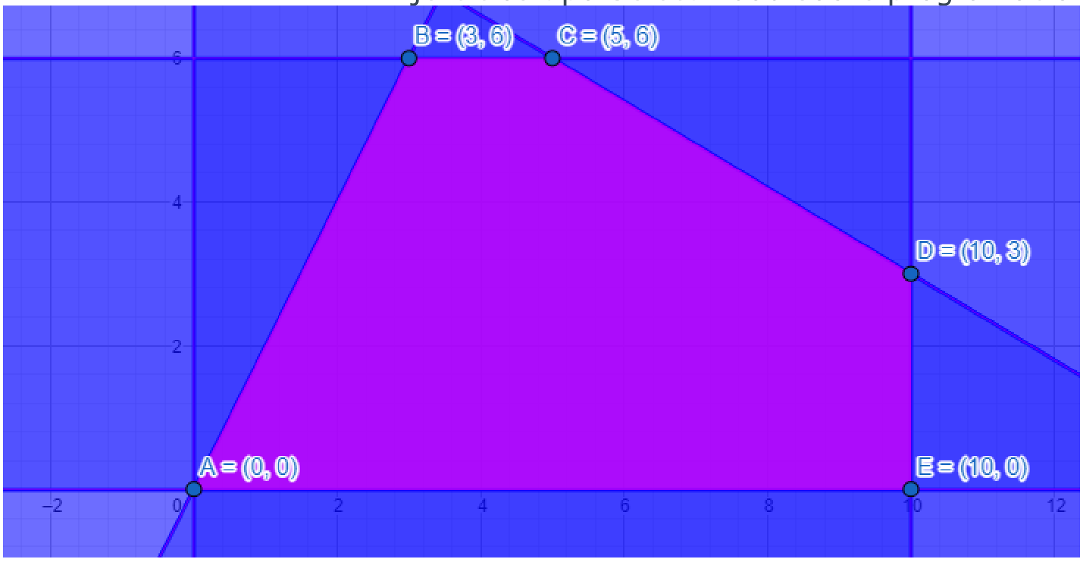
$$x \geq y/2$$

Aplicamos las clásicas condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Dibujamos con Geogebra la región factible, señalando los vértices que la delimitan.



El apartado b) nos pregunta si el punto (7,5) pertenece a la región factible. Con Geogebra es sencillo verlo. Pero si dibujamos la región a mano, como ocurrirá en el examen, es complicado responder mirando la gráfica. Porque el punto (7,5) queda muy cerca de uno de los bordes de la región factible.

¿Cómo responder?

Comprobando, operando, si el punto cumple todas las inecuaciones.

Si sustituimos (7,5) en la inecuación $4{,}5x + 7{,}5y \leq 67{,}5$ resulta:

$$4{,}5 \cdot 7 + 7{,}5 \cdot 5 \leq 67{,}5$$

$$69 \leq 67{,}5 \rightarrow Falso$$

En el momento que una inecuación no se cumple, significa que el punto queda fuera de la región factible.

El apartado c) nos da los datos para plantear la función objetivo:

$$f(x, y) = 2x + 4y$$

Evaluamos cada vértice en la función beneficio. EL Teorema Fundamental de la Programación Lineal nos garantiza la existencia de solución en la región acotada y convexa. Y que aparece en al menos uno de los vértices.

A→$f(0{,}0) = 0$

B→ $f(3{,}6) = 30$

C→ $f(5{,}6) = 34$

D→ $f(10{,}3) = 32$

E→ $f(10{,}0) = 20$

El beneficio máximo es de 34 euros y aparece para 5kg del concentrado A y 6 kg del concentrado B.

EJERCICIO 20

Una librería necesita al menos 14 cajas de rotuladores, 8 cajas de folios y 18 cajas de bolígrafos. Dos distribuidores pueden proporcionarle los materiales, pero solamente los venden en lotes completos. El distribuidor A envía en cada lote 2 cajas de rotuladores, 4 de folios y 1 de bolígrafos. El distribuidor B envía en cada lote 3 cajas de rotuladores, 1 de folios y 7 de bolígrafos. Los costes por lote que se compre a cada distribuidor son de 60 euros y 65 euros respectivamente. ¿Cuántos lotes habrá que comprar a cada distribuidor para que los costes sean mínimos?, ¿cuáles serían esos costes?

Primero detectamos las incógnitas de nuestro problema.

La variable "x" indica el número de lotes a comprar al distribuidor A.

La variable "y" expresa los lotes del distribuidor B.

Un lote de A contiene:

- 2 cajas rotuladores
- 4 cajas folios
- 1 caja bolígrafos

Un lote de B contiene:

- 3 cajas rotuladores
- 1 caja folios
- 7 cajas bolígrafos

Al menos (como mínimo) se requieren 14 cajas de rotuladores. Por lo tanto:

$$2x + 3y \geq 14$$

La librería necesita un mínimo de 8 cajas de folios:

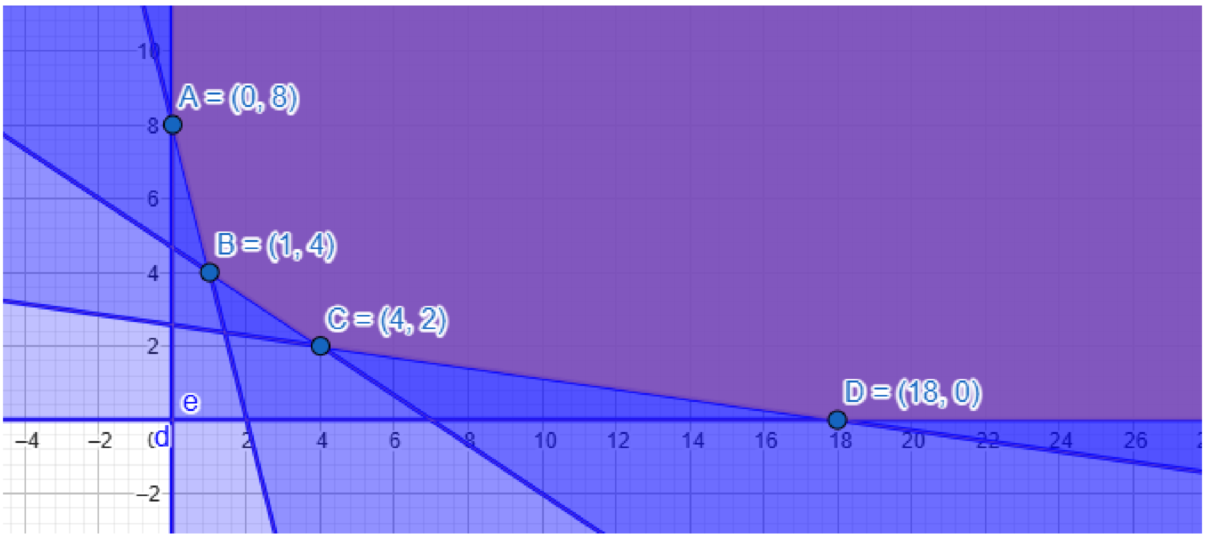
$$4x + y \geq 8$$

Y un mínimo de 18 cajas de bolígrafos:

$$x + 7y \geq 18$$

Las condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



La función costes es la función objetivo. Cada lote de A cuesta 60 euros y cada lote de B cuesta 65 euros. Por lo tanto:

$$f(x, y) = 60x + 65y$$

Estamos ante una región no acotada y convexa. El Teorema fundamental de la programación lineal afirma que, si hay solución, aparecerá en al menos uno de los vértices.

Evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible:

A→$f(0,8) = 0 + 520 = 520$

B→ $f(1,4) = 60 + 260 = 320$

C→ $f(4,2) = 240 + 130 = 370$

d→ $f(18,0) = 1080 + 0 = 1080$

Los costes se minimizan comprando 1 lote de la distribuidora A y 4 lotes de la distribuidora B. Como el vértice (1,4) no está situado junto a un lado formado por una semirecta, podemos afirmar que es la solución del problema de minimización Siendo 320 euros la cantidad mínima de los costes.

EJERCICIO 21

Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprese la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represente gráficamente el recinto definido.

c) Obtenga el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

La variable "x" indica el número de collares. La variable "y" el número de pulseras.

El número máximo de piezas a fabricar es 50. Por lo tanto:

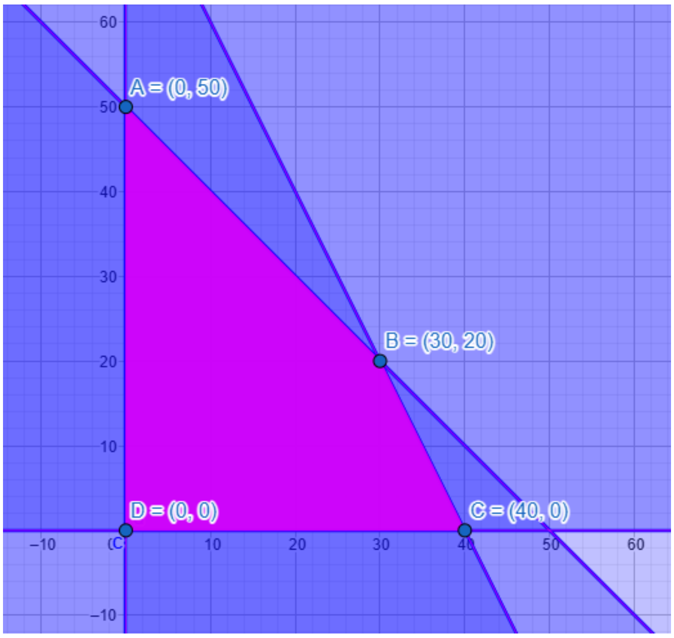
$$x + y \leq 50$$

El número máximo de horas de trabajo es de 80 horas. Cada collar conlleva 2 horas. Cada pulsera, una hora:

$$2x + y \leq 80$$

Condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



La función objetivo es la función beneficio. Cada collar aporta 5 euros de beneficio. Cada pulsera, 4 euros:

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

El Teorema Fundamental de la programación lineal, en una región acotada y convexa, garantiza la solución del problema de maximización. Y esta solución aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

A→$f(0{,}50) = 0 + 200 = 200$

B→$f(30{,}20) = 150 + 80 = 230$ → Beneficio máximo de 230€ con 30 collares y 20 pulseras

C→$f(40{,}0) = 200 + 0 = 200$

D→$f(0{,}0) = 0 + 0 = 0$

EJERCICIO 22

Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las de tipo A y, coma mínimo, 6.000 euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

La variable "x" indica el dinero invertido en A. La variable "y" indica el dinero invertido en B.

La suma de ambas cantidades no puede superar los 210.000 que disponemos:

$$x + y \leq 210.000$$

La cantidad invertida en A no puede superar (valor máximo) los 130.000 euros:

$$x \leq 130.000$$

El dinero invertido en B debe ser mayor o igual (como mínimo) la cantidad de 6.000 euros:

$$y \geq 6.000$$

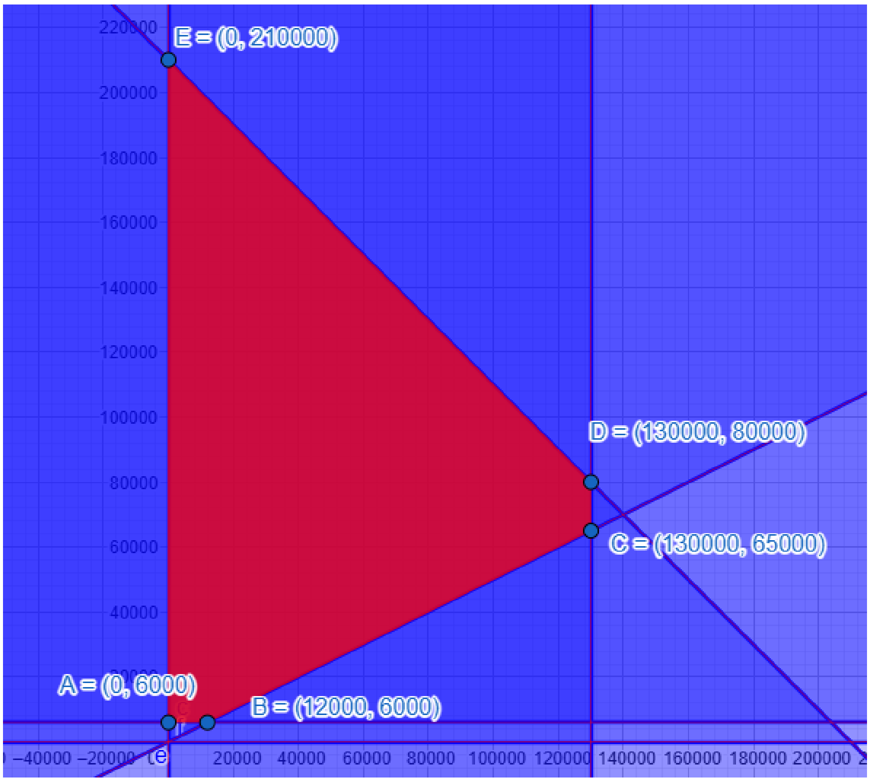
La inversión en A (variable x) es menor o igual que el doble de la inversión en B (variable y).

$$x \leq 2y$$

Condiciones de no negatividad:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



El máximo interés anual implica sumar el beneficio del dinero invertido en A y el beneficio del dinero invertido en B. El tipo A rinde al 10%. El tipo B rinde al 8%. Por lo tanto:

$$f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}08y$$

El Teorema Fundamental de la programación lineal, en una región acotada y convexa, garantiza la solución del problema de maximización. Y esta solución aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

Evaluamos la función en los vértices:

A→$f(0{,}6.000) = 0 + 480 = 480$

B→$f(12.000{,}6.000) = 1.680$

C→$f(130.000{,}65.000) = 18.200$

D→$f(130.000{,}80.000) = 19.400$

D→$f(0{,}210.000) = 16.800$

Interés máximo de 19.400€ invirtiendo 130.000 euros en A y 80.000 euros en B

EJERCICIO 23

Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1.500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2.400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?

EJERCICIO 24

Una empresa de catering dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 litros de almacenamiento en cámaras frigoríficas para elaborar dos tipos de menús: premium y estándar. Ambos menús requieren tiempo, tanto de preparación como de empaquetado, y espacio de almacenamiento en frigoríficos. Concretamente, el menú premium requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 litro en frigoríficos. Por su parte, el menú estándar requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 litros en frigoríficos. El beneficio obtenido por cada menú premium es de 10,50€ y por cada menú estándar es de 5,50€. La empresa sabe que venderá todos los menús producidos. Determine cuántos menús de cada tipo deben elaborarse semanalmente para maximizar el beneficio total y a cuánto asciende este beneficio.

EJERCICIO 25

Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30.000 m^3 de agua, de 5.500 kg de abono y de 3.000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1.500 m^3 de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5.000 kg en secano y de 10.000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

EJERCICIO 26

Una empresa tiene un presupuesto de 78.000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2.400 € y de un anuncio de televisión de 3.600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34.000 personas y de un anuncio de televisión a 72.000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

EJERCICIO 27

Un centro de bricolaje, que almacena bidones de pintura de interior y de exterior, cuenta con una capacidad máxima de almacenaje de 160 bidones. Por una cuestión logística, en el almacén deben mantenerse al menos 60 bidones, siendo como mínimo 20 bidones de pintura interior. Además, el número de bidones de pintura exterior almacenados no podrá ser inferior al de pintura interior. Se sabe que el gasto diario por almacenar cada bidón de pintura interior es de 1,50€ y por cada bidón de pintura exterior es de 0,90€. Calcule cuántos bidones de cada tipo se deben almacenar para que el gasto diario sea mínimo e indique cuánto supone ese gasto mínimo.

EJERCICIO 28

Un joyero desea fabricar dos tipos de pulseras, A y B, y para ello dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata. Para fabricar las del tipo A necesita 1 g de oro y 2 g de platino, mientras que para las del tipo B requiere 2 g de oro, 1 g de platino y 1 g de plata. Cada pulsera del tipo A se vende por 150 € y cada una del tipo B por 200 €. Si se vende toda la producción, ¿cuántas pulseras de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden éstos? ¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

EJERCICIO 29

A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

EJERCICIO 30

Para un proyecto de software libre se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python. Es necesario formar equipos de trabajo de dos tipos. El primer tipo estará compuesto por 2 desarrolladores de Javascript y 3 de Python, y el segundo tipo por 6 de Javascript y 4 de Python. Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo. Determine cuántos equipos de cada tipo se podrán formar para obtener el mayor número de equipos posible. En tal caso, ¿cuántos desarrolladores de Javascript y Python se utilizarán?

CONSEJOS FINALES PARA AFRONTAR LOS EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

- Al final del enunciado, por norma general, aparece una pregunta que indica claramente cuáles son las dos variables a considerar. Así tendremos claro quién será "x" y quién será "y".
- Si aparece un único punto óptimo, hablaremos de región factible con solución única.
- Si los puntos óptimos aparecen a lo largo de todo un segmento entre dos vértices, tendremos región factible con infinitas soluciones para el problema de optimización.
- Cuando no existe límite máximo al valor de la imagen de la función objetivo, y se puede hacer tan grande como se desee, diremos que no hay máximo. Y si la imagen se puede hacer tan pequeña como se desee, diremos que no hay mínimo.
- Si no existe una región factible sobre la que aplicar una función objetivo, diremos que la región es no factible porque las inecuaciones generan restricciones inconsistentes (es imposible cumplir todas las condiciones).
- No olvidar las dos condiciones de positividad $x \geq 0$, $y \geq 0$ si las variables lo requieren. No suele decirse de manera explícita en el enunciado de los problemas de contexto.
- Si me piden comprobar si un punto $P(x_{0,}y_0)$ pertenece a una región factible, no se hace a ojo. Se comprueba que el punto cumple una a una todas las inecuaciones.
- Un punto $P(x_{0,}y_0)$ puede ser interior a una región factible, o bien un punto en la frontera o bien un punto exterior. Es exterior cuando, al menos, no cumple una de las inecuaciones. Está en la frontera cuando cumple el signo igual que aparece en al menos una de las inecuaciones no estrictas y cumple el resto de las inecuaciones. Y es interior cuando cumple todas las inecuaciones de manera estricta (sin el signo igual).
- La forma general de la función objetivo es $f(x,y) = ax + by + c$. En muchos ejercicios tipo Selectividad el término independiente c es 0. Pero podría ser cualquier valor real.