

definisi: Integral tentu (definite integral) adalah bentuk integral yang variabel integrasinya memiliki batasan (batas atas dan batas bawah) yang ditulis di bagian atas dan bawah notasi integral.

notasi integral tentu:

$$\int_a^b f(x) dx$$

sifat-sifat integral tentu:

1.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_c^d f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \quad \text{dengan } a < b < c$$

3.

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \text{berarti } F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$$

4.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

5.

$$\int_b^a f(x) dx \pm g(x) = \int_b^a f(x) dx \pm \int_b^a g(x) dx$$

Perhitungan Integral Tentu

untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

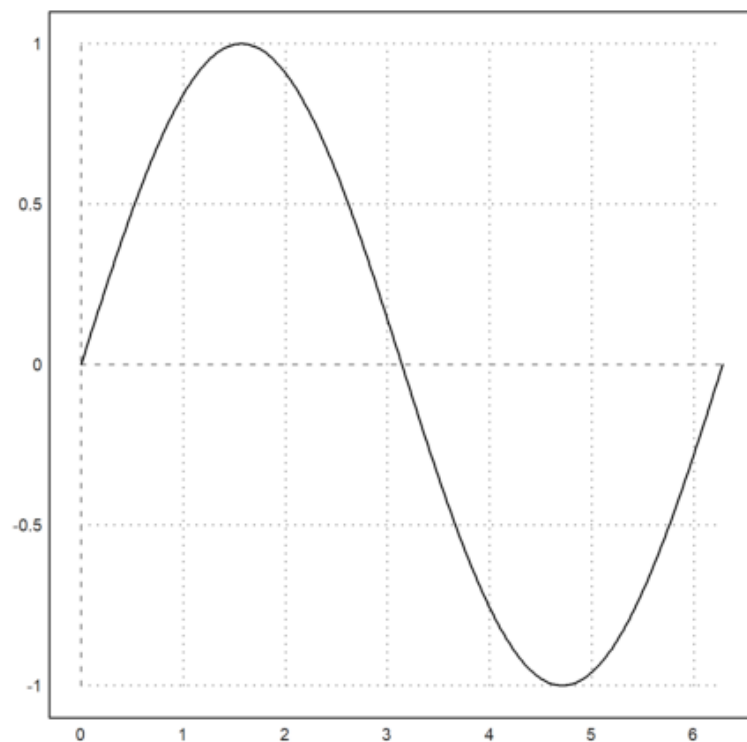
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini). Berikut integral tentu yang dapat menggunakan fungsi integrate:

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```



```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b)
```

$$\int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{25^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$showev('integrate((x^2-2*x+3),x,1,2))
```

$$\int_1^2 x^2 - 2x + 3 dx = \frac{7}{3}$$

```
>$showev('integrate((x^3-6*x^2+8*x+2),x,-1,2))
```

$$\int_{-1}^2 x^3 - 6x^2 + 8x + 2 dx = \frac{15}{4}$$

```
>$showev('integrate((4*x^3-2*x+5),x,0,2))
```

$$\int_0^2 4x^3 - 2x + 5 dx = 22$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

$$E^{-x^2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x)
```

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

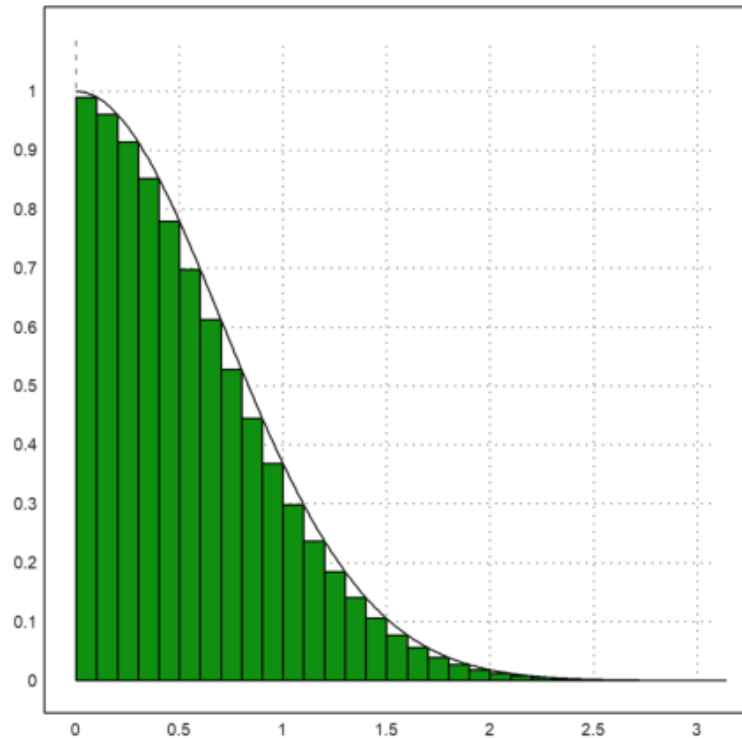
$$\operatorname{erf}(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

maxima: `'integrate(f(x),x,0,pi)`

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva $y=f(x)$ tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

maxima: `'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))`

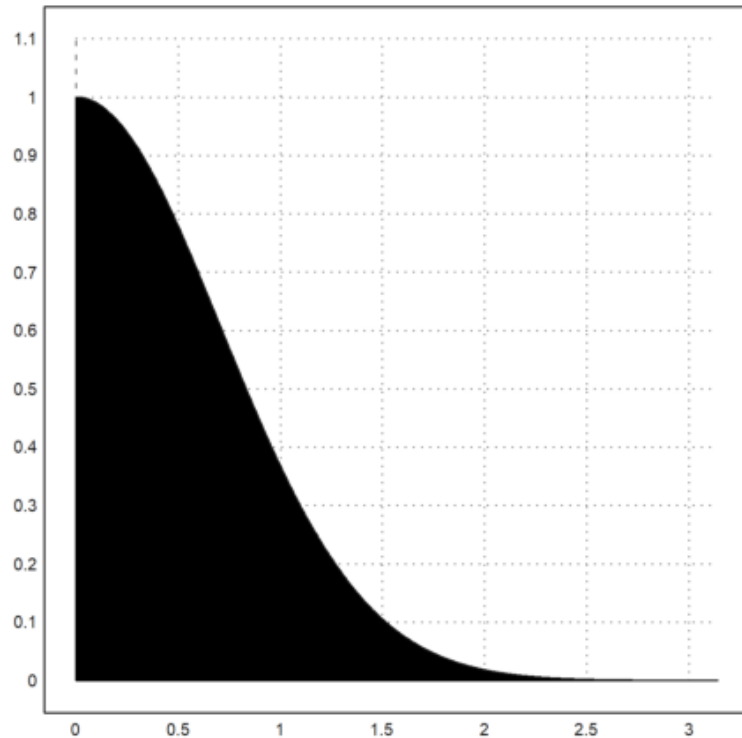
Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval ($=0.1$) dan jumlah nilai-nilai $f(x)$ untuk $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

0.836219610253

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

```
>x=0:0.001:pi-0.001; plot2d(x,f(x+0.001),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.001,0.001); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
```

Maxima output too long!

Error in:

```
t &= makelist(a,a,0,pi-0.001,0.001); // t sebagai list untuk m ...
      ^
```

```
>fx &= makelist(f(t[i]+0.001),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
```

Maxima output too long!

Error in:

```
fx &= makelist(f(t[i]+0.001),i,1,length(t)); // simpan nilai-n ...
      ^
```

```
>0.001*sum(f(x+0.001)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

0.885719054393

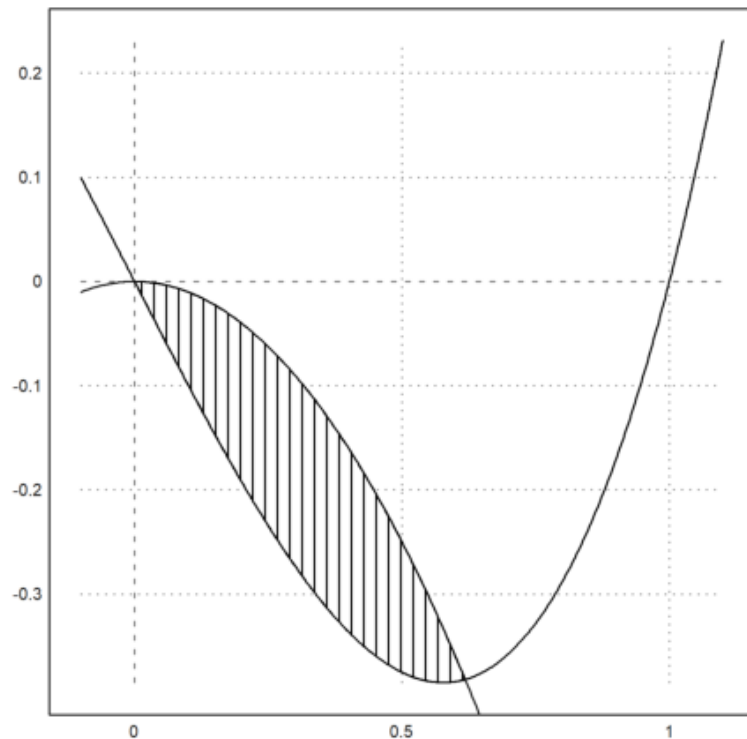
Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add); ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurva
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

hasil ini akan dibandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksa
```

$$\left[x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x = 0 \right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} -x^3 - x^2 + x dx = \frac{13 - 5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949} -1.0x^3 - 1.0x^2 + x dx = 0.07581917135421037$$

Latihan mencari integral

Hitunglah integral tentu dengan batas yang sudah ditentukan di bawah ini!

1.

$$\int_1^2 (4x - 6x^2) dx$$

```
>$showev('integrate(4*x-6*x^2,x,1,2))
```

$$\int_1^2 4x - 6x^2 dx = -8$$

2.

$$\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}} dx$$

```
>$showev('integrate(1/(sqrt(2*x+2)),x,1,7))
```

$$\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}} dx = 2$$

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) + \sin(x) dx$$

```
>$showev('integrate(cos(x)+sin(x),x,0,pi/2))
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x + \cos x dx = 2$$

4.

$$\int_2^5 \sqrt{y-1} dy$$

```
>$showev('integrate((sqrt(y-1)),y,2,5))
```

$$\int_2^5 \sqrt{y-1} dy = \frac{14}{3}$$

5.

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$$

```
>$showev('integrate((1/x^2),x,1,4))
```

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{4}$$

Hitunglah integral di bawah ini!

$$x^x$$

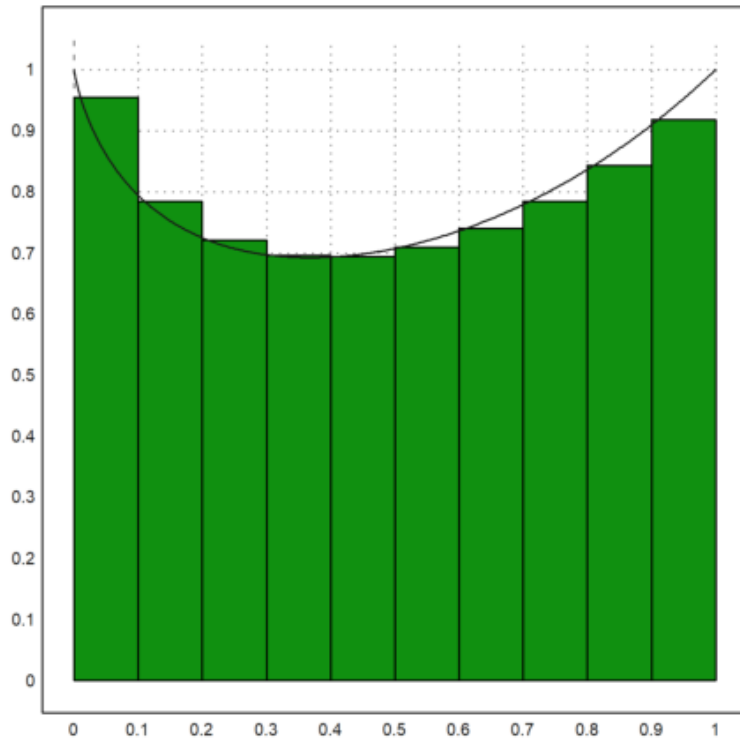
```
>function f(x) &= x^x
```

$$x^x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 x^x dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

```
>t &= makelist(a, a, 0, 1-0.01, 0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01), i, 1, length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))

```
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

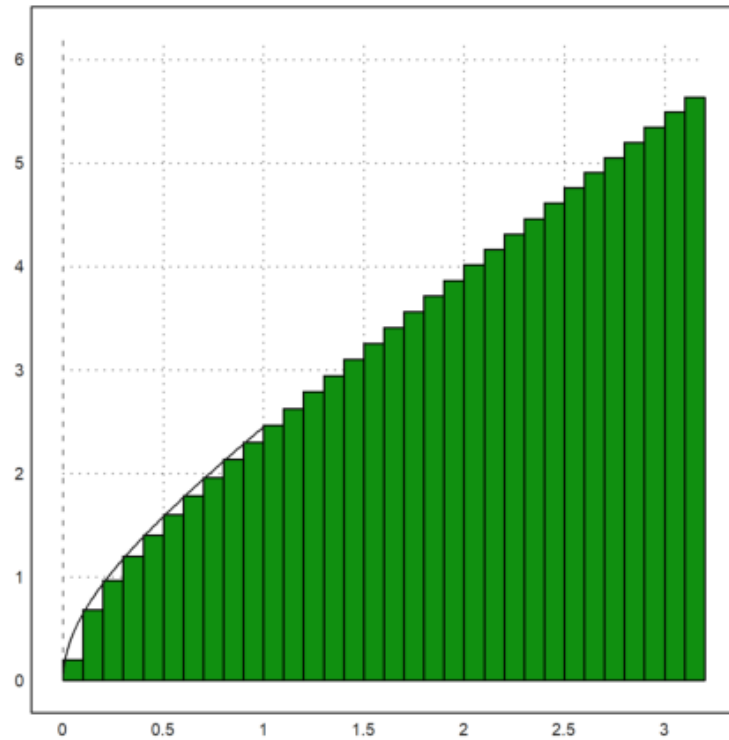
0.0784335266083

Latihan visualisasi grafik fungsi

```
>function f(x):=sqrt(2*x^2+4*x)
>$showev('integrate(sqrt(2*x^2+4*x), x, 0, 2))
```

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 4x} dx = \frac{\log 4}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} \log(2^{\frac{7}{2}} + 12) - 12}{2}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x, f(x+0.01), >bar); plot2d("f(x)", 0, 1, >add):
```



```
>function f(x):=sin(2x)
>$showev('integrate(sin(2*x),x,0,pi/4)')
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \frac{1}{2}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

