

Dag van de Wiskunde

www.karelappeltans.be

22 maart 2025

Determinanten &...

1 Stelsels

Stelsels oplossen:

$$\begin{cases} 3x + 1y = 7 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$$

Los op via combinatiemethode

$$\begin{cases} 3x + 1y = 7|-2 \\ 2x + 4y = 8|+3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + cy = e|-b \\ bx + dy = f|+a \end{cases}$$

$$(+)\quad (1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3)y = 7 \cdot (-2) + 8 \cdot 3$$

$$-bcy + ady = -be + fa$$

$$(ad - bc)y = af - be$$

$$\text{als } ad - bc \neq 0 \Rightarrow y = \frac{af - be}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

$$|A| = \det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Figuur 1: <https://www.geogebra.org/m/ky53wsdg>

2 Inverse

Determinant via inverse matrix

$$\text{Definitie: } A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} az + ct = 0 \\ bz + dt = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{d}{|A|}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-c}{|A|}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-c}{|A|} \\ \frac{-b}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-b}{|A|}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{|A|}$$

Figuur 2: <https://www.geogebra.org/m/ky53wsdg>

3 Lineaire transformatie

3.1 Definitie

Definitie:

Zij V en W vectorruimten over $\mathbb{R}$.

Een afbeelding $T : V \rightarrow W$ noemt men een lineaire afbeelding of lineaire transformatie als geldt:

1. $\forall u, v \in V : T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : T(\lambda v) = \lambda T(v)$

$T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$ met $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ is een lineaire transformatie

Figuur 3: <https://www.geogebra.org/m/qptms4qh>

Definitie lineaire transformatie

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
 $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
 $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\lambda = 3$

$$T(u + v) = A \cdot (u + v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 44 \end{pmatrix}$$

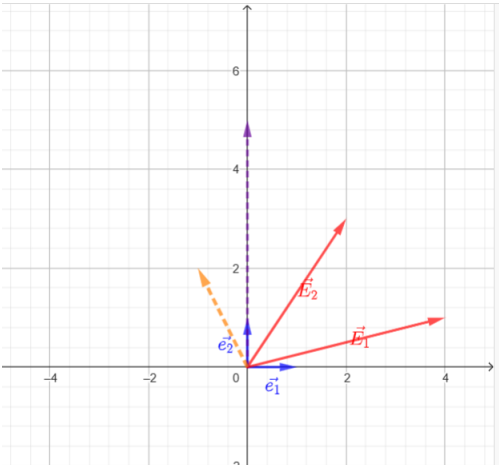
$$T(u) + T(v) = A \cdot u + A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$T(\lambda v) = A \cdot (\lambda v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\lambda T(v) = \lambda [A \cdot v] = 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Figuur 4: <https://www.geogebra.org/m/qptms4qh>

3.2 Grafische betekenis



Lineaire transformatie

$T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : X \mapsto A \cdot X$
 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

☒ basis vectoren: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_A} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{E}_1$
 $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_A} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{E}_2$

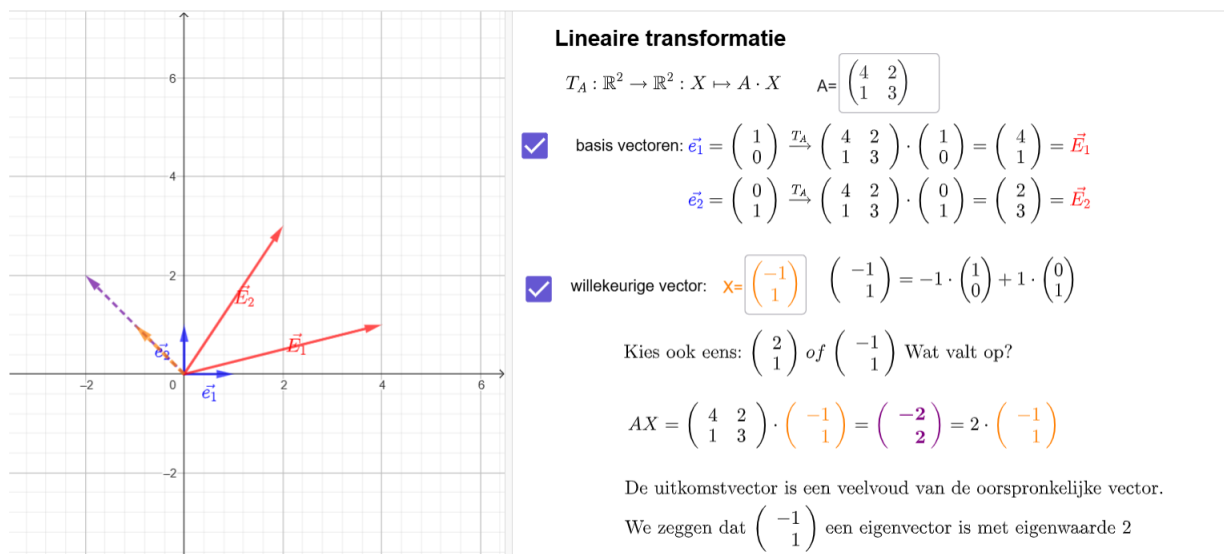
☒ willekeurige vector: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kies ook eens: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Wat valt op?

$AX = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

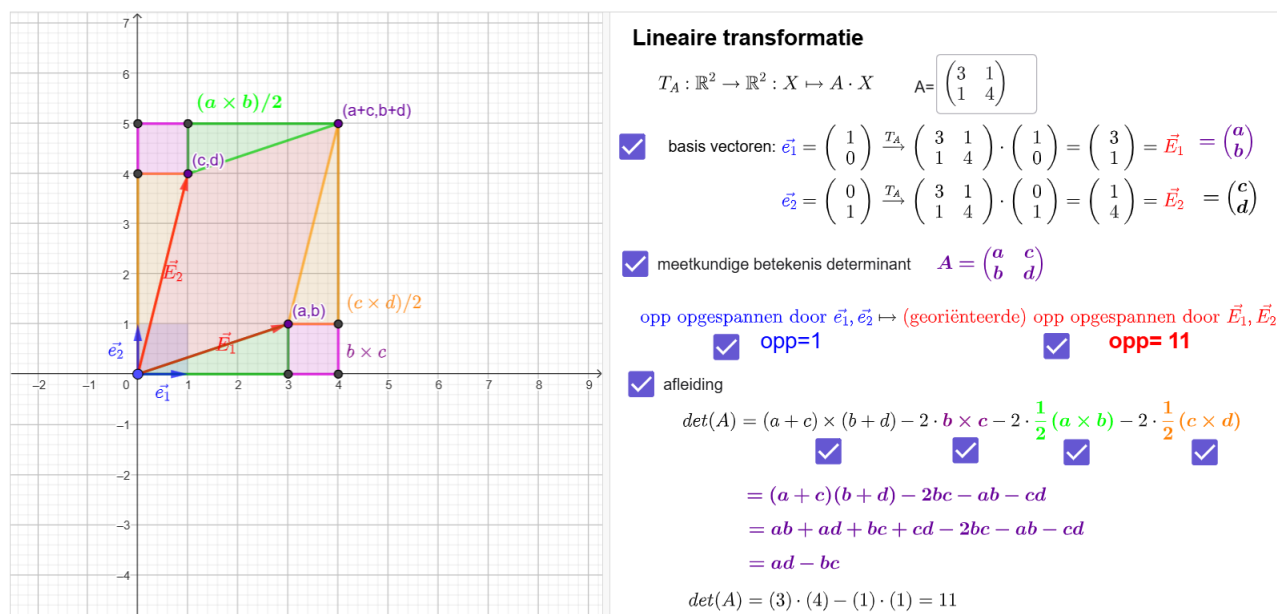
Figuur 5: <https://www.geogebra.org/m/qptms4qh>

3.3 Eigenvector en eigenwaarde

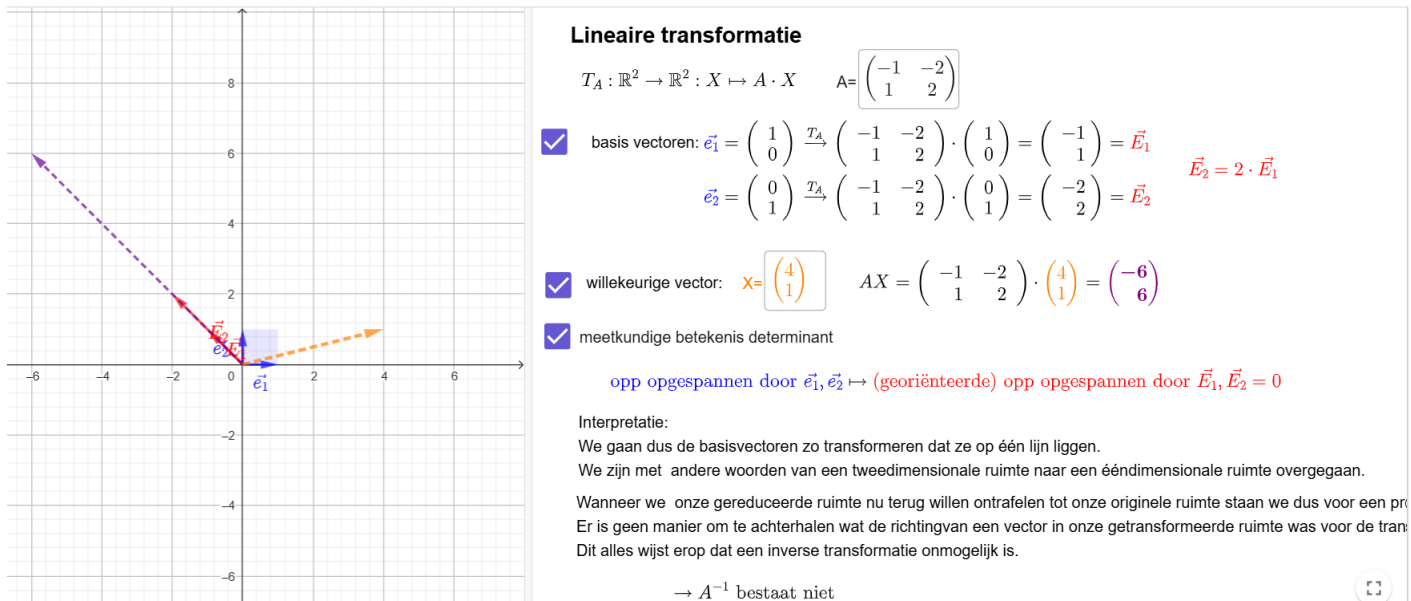


Figuur 6: <https://www.geogebra.org/m/qptms4qh>

3.4 determinant



Figuur 7: <https://www.geogebra.org/m/qptms4qh>



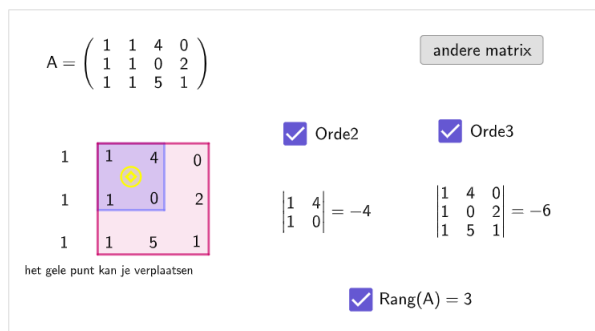
Figuur 8: <https://www.geogebra.org/m/qptms4qh>

4 Rang van een matrix

De rang van een $m \times n$ -matrix A is gelijk aan r als en slechts als er tenminste één van nul verschillende minor van de r -de orde bestaat, terwijl alle minoren van de $(r+1)$ -de orde gelijk zijn aan nul. Volgende regels gelden dan bij het oplossen van stelsels

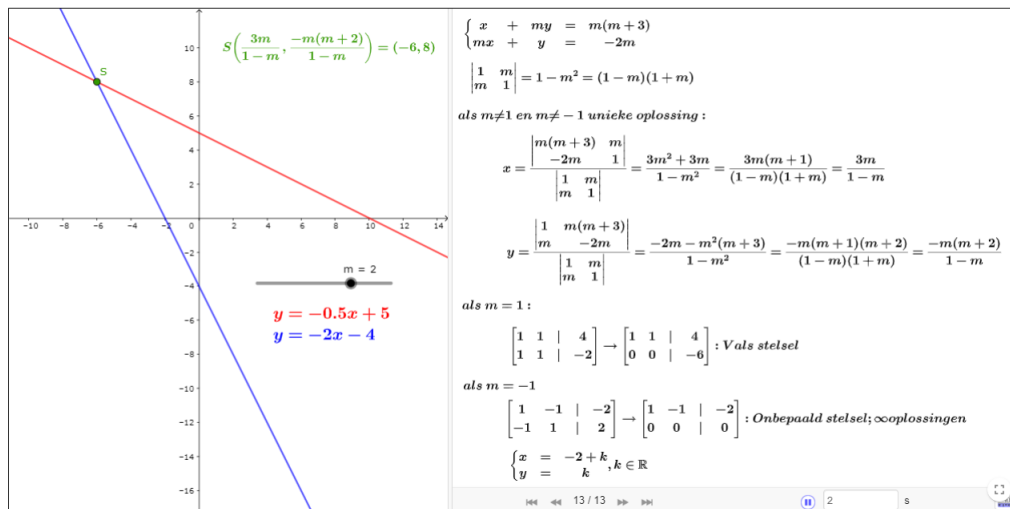
- $r(A) = r(A_b) : \#onbekenden$: unieke oplossing
- $r(A) < r(A_b)$: Vals stelsel
- $r(A) = r(A_b) < \#onbekenden$: onbepaald stelsel

rang van een matrix met behulp van determinanten



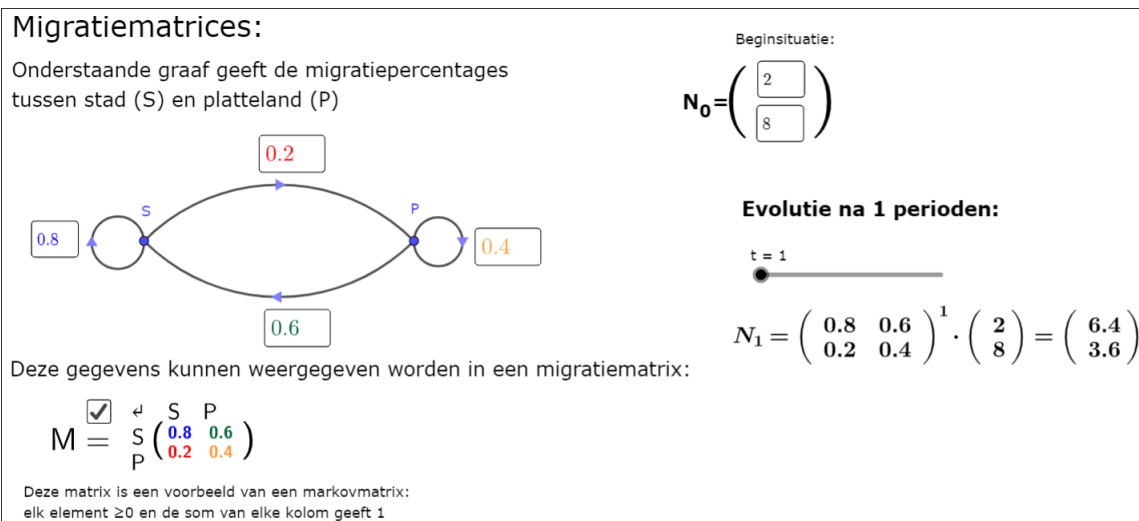
Figuur 9: <https://www.geogebra.org/m/Thk96QYz>

5 Stelsels met parameter



Figuur 10: <https://www.geogebra.org/m/g7TcQBkv>

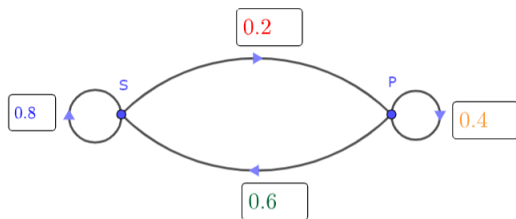
6 Markov



Figuur 11: <https://www.geogebra.org/m/h7g2xd8b>

Migratiematrixes:

Onderstaande graaf geeft de migratiepercentages tussen stad (S) en platteland (P)



Deze gegevens kunnen weergegeven worden in een migratiematrix:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Deze matrix is een voorbeeld van een markovmatrix: elk element ≥ 0 en de som van elke kolom geeft 1

Stabiele situatie:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.8x + 0.6y = x \\ 0.2x + 0.4y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0.2x + 0.6y = 0 \\ 0.2x - 0.6y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$RREF \begin{pmatrix} -0.2 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & -0.6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.75 \\ y = 0.25 \end{cases}$$

$$\text{andere methode: } \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

De stabiele situatie: 75% woont in de stad en 25% zal op het platteland wonen.

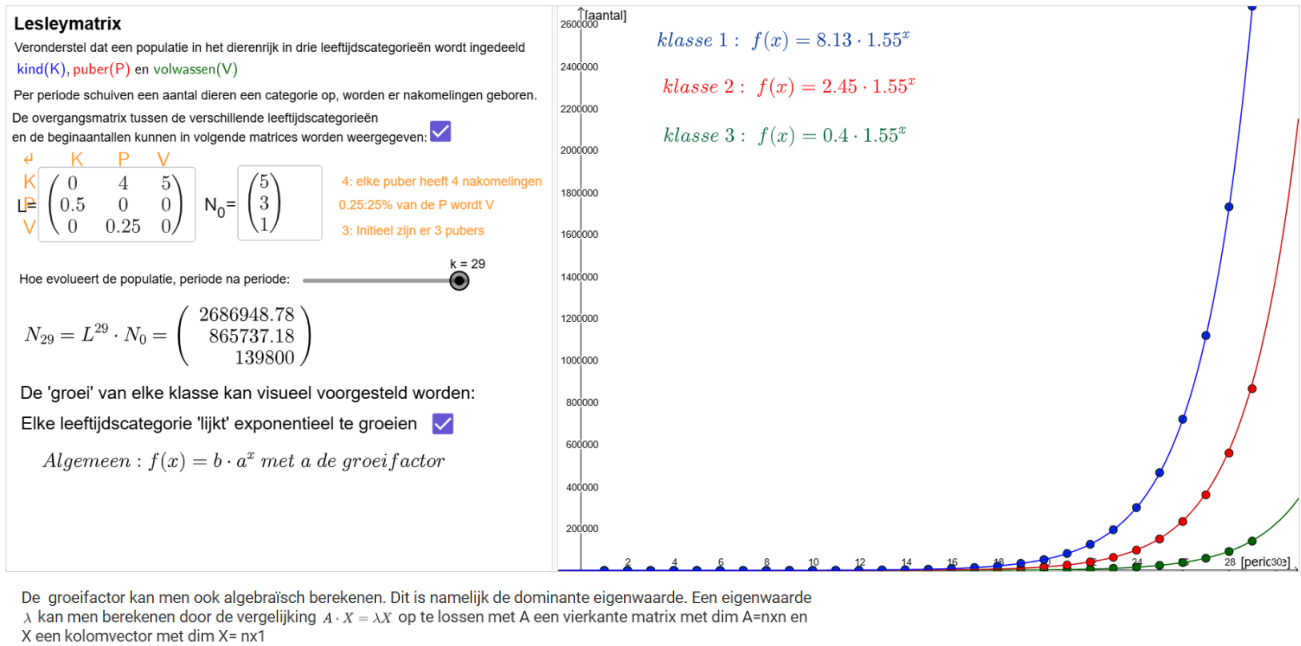


Figuur 12: <https://www.geogebra.org/m/h7g2xd8b>

Stellingen (1ste bachelor wiskunde):

1. Een stochastische matrix heeft altijd 1 als eigenwaarde en alle andere eigenwaarden liggen strikt tussen -1 en 1.
2. Als S een stochastische matrix is, dan bestaat $\lim_{n \rightarrow +\infty} S^n$, en de limiet, die we $S^{+\infty}$ is ook een stochastische matrix
3. Als S een stochastische matrix is, en als v een willekeurige stochastische vector is, dan is $S^{+\infty} \cdot v$ een eigenvector bij eigenwaarde 1 van S

7 Lesleymatrices



Eigenwaarden berekenen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hiervoor moet volgend stelsel opgelost worden:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

Wil dit stelsel een oplossing, verschillende van de nul-oplossing hebben, moet

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda + 0.5 = 0$$

oplossingen: $\{\lambda = -1.267, \lambda = -0.2587, \lambda = 1.5257\}$

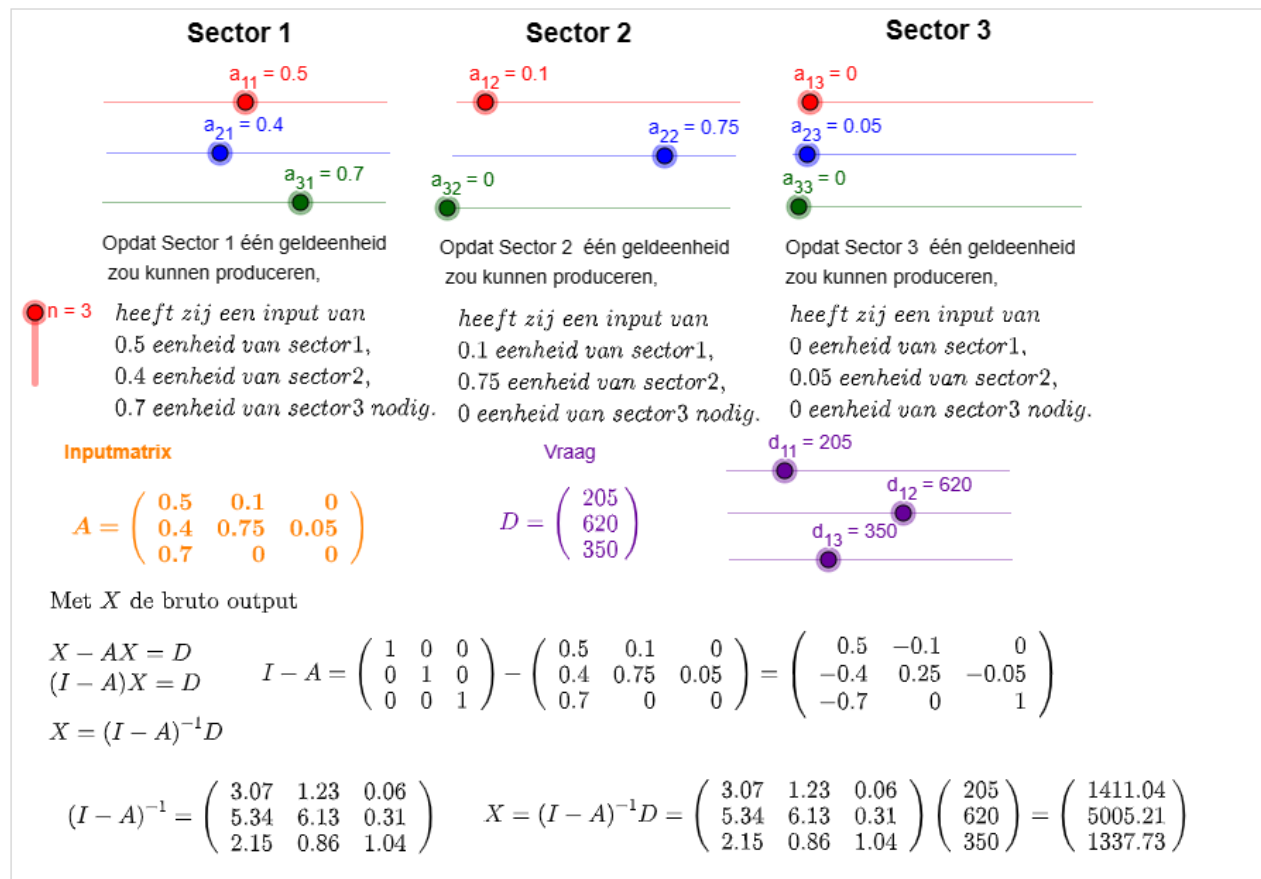
Figuur 13: <https://www.geogebra.org/m/jcS4NRh8>

Stellingen:

Zie Euler-Lotka vergelijking

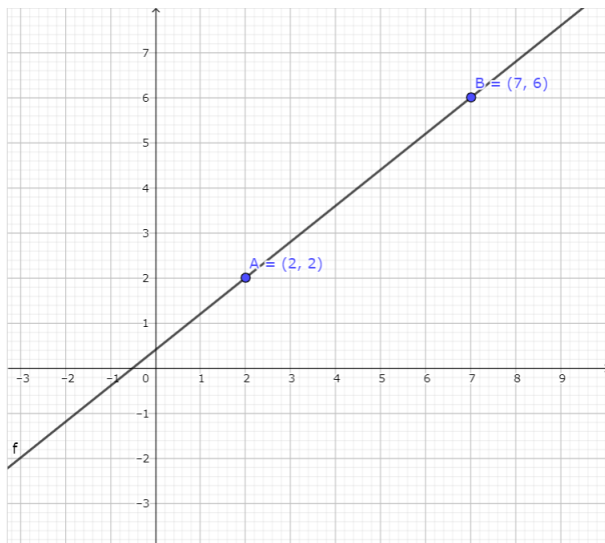
8 Leontief

Input-Output modellen van Leontief



Figuur 14: <https://www.geogebra.org/m/xes8c7NN>

9 Meetkundige toepassingen



Determinantvergelijking rechte:

$$r \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dit geeft hier:

$$r \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r \leftrightarrow -4x + 5y = 2$$

Afleiding formule:

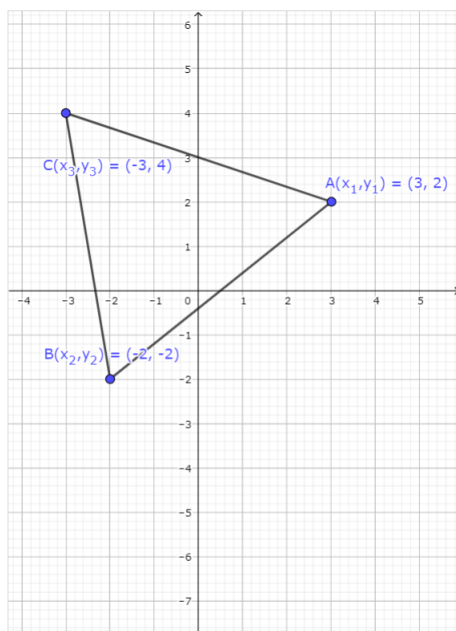
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 - R_2} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ontwikkeling naar } K_3} (x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Figuur 15: <https://www.geogebra.org/m/vfenrnkv>



Oppervlakte driehoek m.b.v. determinant

$$\text{opp } \Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dit geeft hier: $\text{opp } \Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{|-34|}{2} = 17$$

Afleiding formule:

$$\text{opp } \Delta ABC = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{met } b = |BC| \text{ en } h = d(A, BC)$$

$$|BC| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{ontw. } R_1]{\text{ontw. } R_1} (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$$

$$d(A, BC) = \frac{|ux_1 + vy_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

$$\text{opp } \Delta ABC = \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

Figuur 16: <https://www.geogebra.org/m/vfenrnkv>

10 Bewijstechnieken

10.1 Rechtstreeks bewijs

Eigenschappen inverse matrix

A en B zijn reguliere matrices met dimensie $n \times n$; $k \in \mathbb{R}_0$

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

$$BB^{-1} = I = B^{-1}B$$

'de inverse matrix van een geg matrix is de matrix die (rechts en links) vermenigvuldigt met de geg matrix de eenheidsmatrix geeft met als notatie: A^{-1}

1. $(A^{-1})^{-1} = A$ ☒ bewijs $(A^{-1})^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met $A^{-1}I$ geeft, dat is dus A want geg $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ☒ bewijs $(AB)^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met AB I geeft

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ☒ bewijs $(kA)^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met kA I geeft

$$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)kA = \left(\frac{1}{k}k\right)A^{-1}A = 1I = I$$

$$kA\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\frac{1}{k}\right)AA^{-1} = 1I = I$$

4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ☒ bewijs $(A^T)^{-1}$ is de matrix die (links en rechts) vermenigvuldigt met A^T I geeft

$$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

Figuur 17: <https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn>

10.2 Bewijs uit het ongerijmde

Gegeven: inverteerbare matrix A

TB: de inverse van deze matrix A is uniek

bewijs:

Veronderstel dat deze inverse matrix niet uniek is

dat er twee inverse matrices van de matrix A bestaan, we noemen ze B en C

Uit de definitie van inverse matrix volgt dan:

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

$$A \cdot C = I = C \cdot A$$

Volgende berekeningen gelden dan:

$$B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$$

Dus B=C, dus de inverse matrix is uniek, met notatie A^{-1}

16 / 16

Figuur 18: <https://www.geogebra.org/m/yfqw9ndn>

10.3 Volledige inductie

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **TB:** $A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 1 - 3^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bewijs:
We gaan na dat de uitspraak klopt voor n=1: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Inductiestap: We veronderstellen dat de eigenschap klopt voor n=k
We gaan na dat dan de eigenschap ook klopt voor n=k+1

$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 3^k & 1 - 3^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^k \cdot 3 + (1 - 3^k) \cdot 0 & 3^k \cdot (-2) + (1 - 3^k) \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$

inductiestap

$3^k \cdot (-2) + (1 - 3^k) \cdot 1 = -2 \cdot 3^k - 3^k + 1 = -3 \cdot 3^k + 1 = 1 - 3^{k+1}$

$= \begin{bmatrix} 3^{k+1} & 1 - 3^{k+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figuur 19: <https://www.geogebra.org/m/qmv5gwhc>

10.4 Ontkrachting door tegenvoorbeeld

Niet commutatief!

☒ definitie commutativiteit wil zeggen dat $AB=BA$

☒ voorbeeld 1 $\dim A = 3 \times 2$ en $\dim B = 2 \times 3$, $\dim AB = 3 \times 3$ en $\dim BA = 2 \times 2$
Dus de dimensies van AB en BA zijn verschillend, dus
 $AB \neq BA$

☒ voorbeeld 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $AB \neq BA$

Figuur 20: <https://www.geogebra.org/m/wXBpq5Ay>

Referenties

- [1] Peter De Maesschalk, *Matrices, eigenvectoren en grote machten. De wiskunde achter Google PageRank*. UHasselt, Hasselt, 2010.
- [2] Paul Igodt e.a., *Lineaire algebra* Universitaire Pers Leuven, Leuven, 2011.
- [3] Jan van de Craats, *Vectoren en Matrices, een inleiding in lineaire algebra*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2010.
- [4] Michel Roelens e.a., *Determinanten*, Uitwiskeling jaargang 41, Acco Leuven, Leuven, 2024.
- [5] Anne Kaldewaij, *Vectorrekening en Matrixrekening* Wiskunde voor Bachelor en Master, deel 4, Syntax Media, Utrecht, 2019.
- [6] Vito Courtens, *Lineaire transformaties*, studentencursus, Hasselt, 2025.
- [7] Karel Appeltans, *Matrices en determinanten*, www.karelappeltans.be, 2025.
- [8] Ineke Van Nieuwenhuyse e.a. *Wiskunde voor bedrijfskundigen*, UHasselt, Hasselt, 2025.
- [9] Ralph Howard, *A Note on the Eigenvalues and Eigenvectors of Leslie matrices*, University of South Carolina, South Carolina.
- [10] Mathy Becker, *Determinanten* Hasselt, 1993.