Club GeoGebra Iberoamericano

2

TRIÁNGULOS

TRIÁNGULOS

INTRODUCCIÓN

Esta unidad, la dedicamos a dedicar al estudio de triángulos. Vamos a construir triángulos bajo unas ciertas condiciones. Dados tres lados cualesquiera vamos a investigar qué condiciones deben cumplir las longitudes de los lados para construir un triángulo con ellos; hablaremos de los diferentes elementos notables de un triángulo, tanto rectas, como puntos, como circunferencias y demostraremos o mejor dicho, comprobaremos el teorema de Pitágoras.

Al igual que en unidades anteriores ofreceremos actividades y materiales que puedan servir como punto de partida y también actividades de investigación para así poder crear materiales propios y poder compartir con los demás participantes, ese es el objetivo fundamental del club.

Actividades de investigación

a) Dados dos triángulos rectángulos iguales ¿qué figuras puedes construir con ellos si los unimos?

b) Dados dos triángulos isósceles iguales, ¿qué figuras puedes construir con ellos? ¿Podrás construir un cuadrado? ¿En qué condiciones?

ELEMENTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

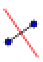
En un triángulo hay una serie de rectas denominadas *notables*:

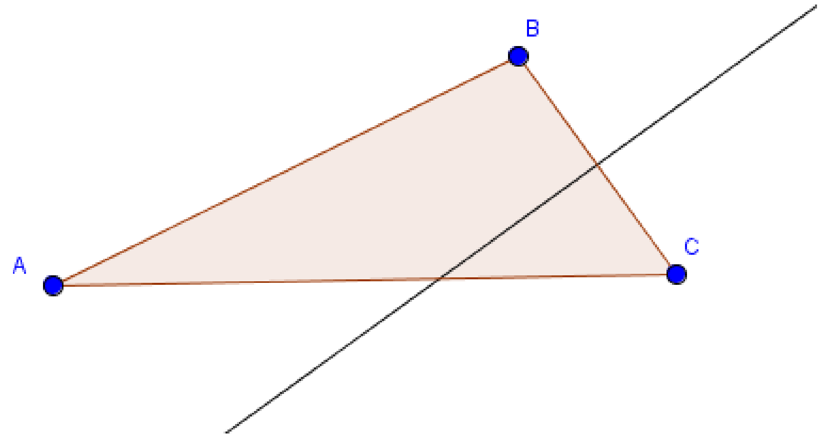
- **Mediatriz**: recta perpendicular a un lado por el punto medio.
- **Mediana**: recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
- **Altura**: recta perpendicular a un lado por el vértice opuesto.
- **Bisectriz**: es la recta que divide por la mitad un ángulo interior del triángulo.

Además, hay una serie de puntos notables que vas a obtener a continuación.

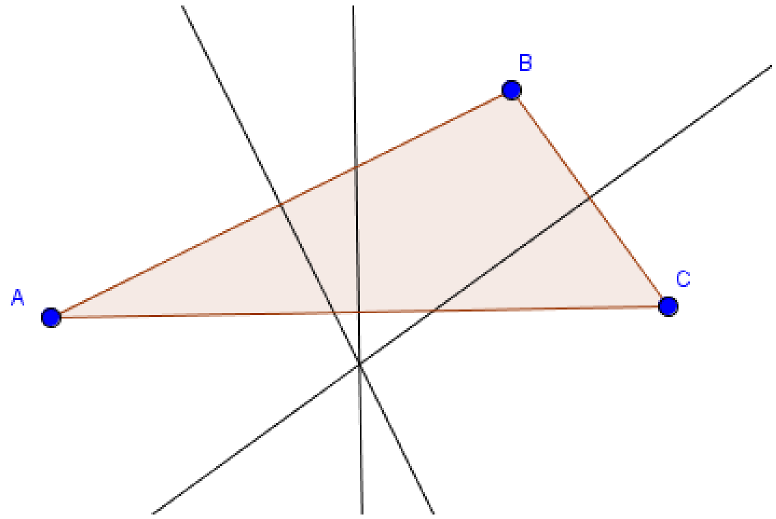
Vamos a construir las diferentes recta notables y sus puntos de intersección.

Mediatrices:

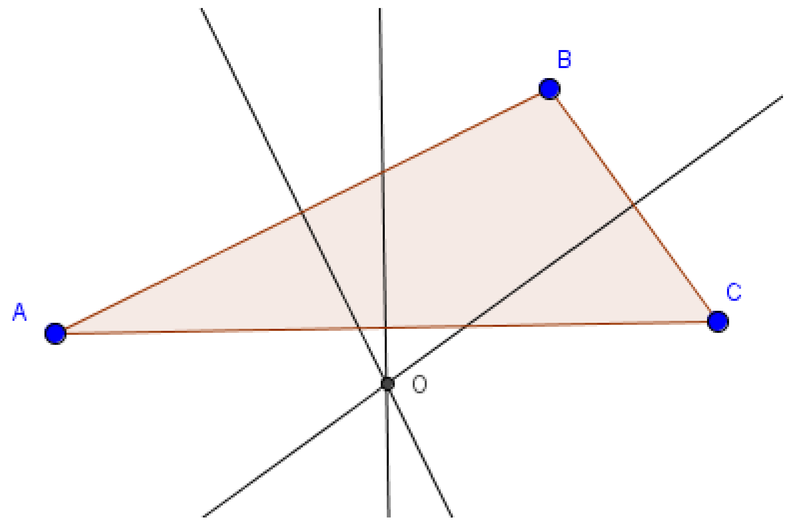
En un triángulo ABC la mediatriz de un lado se obtiene con la herramienta **Mediatriz** . Bastará con pulsar sobre un lado para obtener la mediatriz correspondiente.



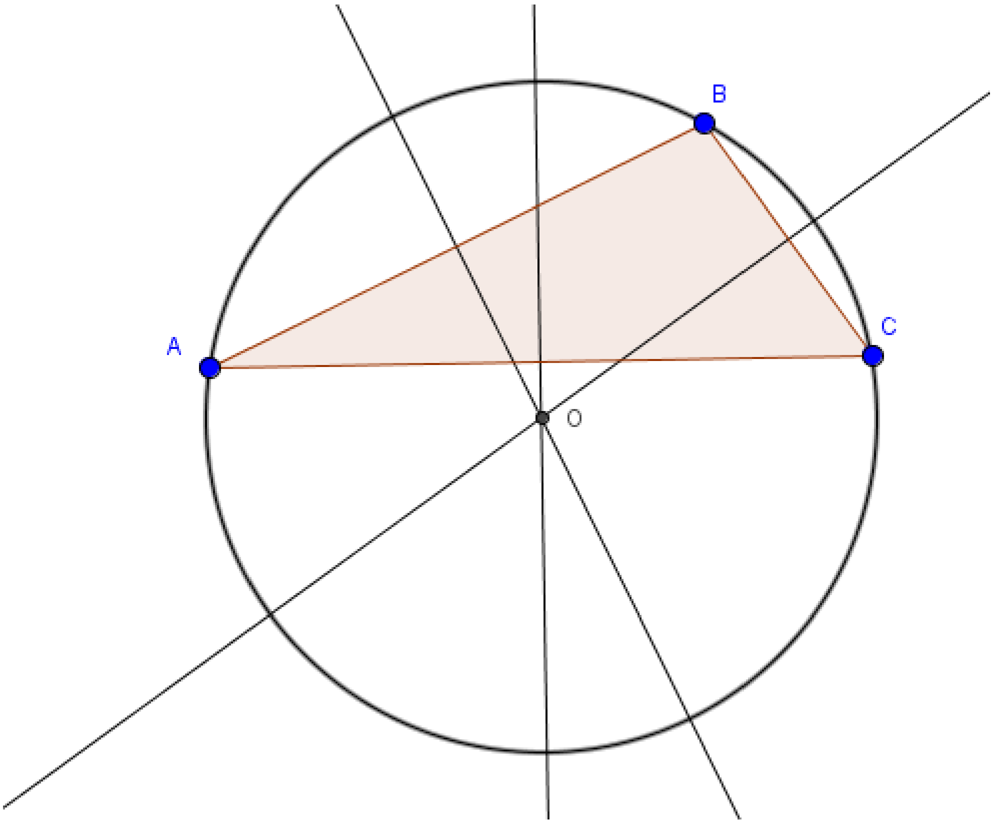
De manera similar se obtendrán las otras dos mediatrices.



Las tres mediatrices se cortan en el *circuncentro* que se podrá obtener como intersección de dos cualquiera de las mediatrices (recordemos que la herramienta Intersección devuelve los puntos de intersección de dos objetos)

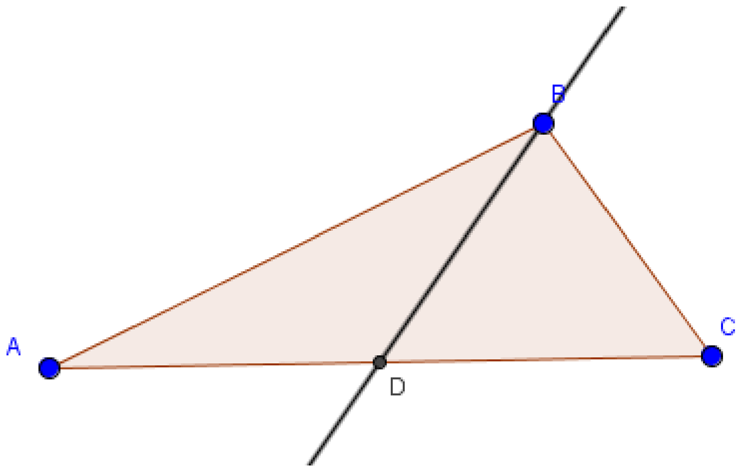


El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo que podemos dibujar utilizando cualquiera de las opciones ya conocidas.



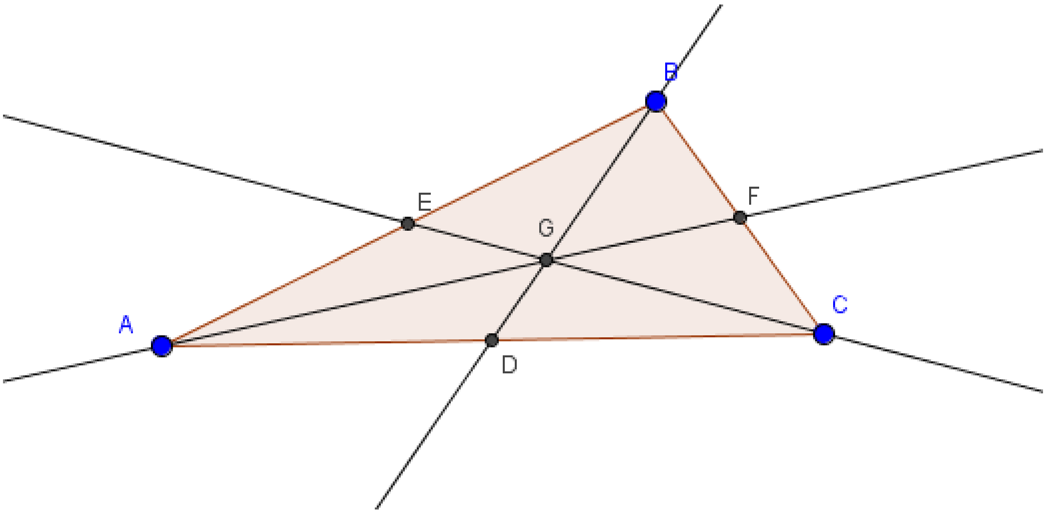
Medianas:

Para obtener la mediana de un lado del triángulo, basta con obtener el punto medio del lado, utilizando a continuación la herramienta **Recta** para trazar la recta que pasa por este punto medio y el vértice opuesto al lado.



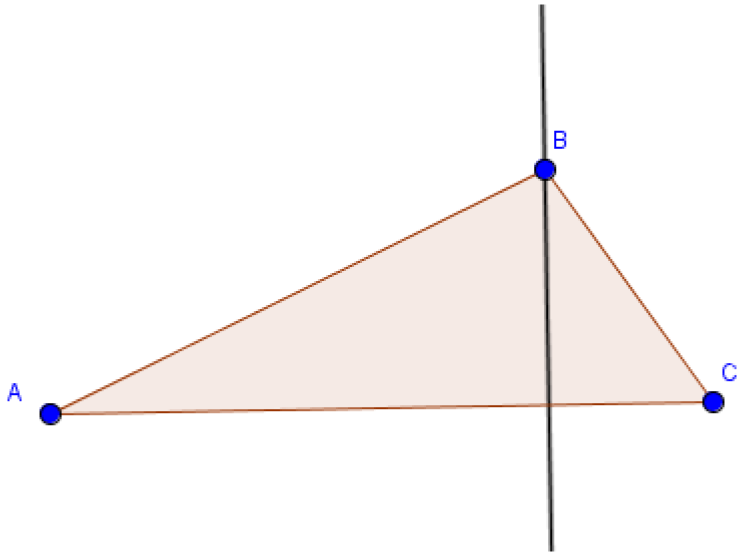
De manera análoga se obtendrán las otras dos medianas, determinando previamente el punto medio de cada lado.

Las tres medianas se cortan en un punto denominado baricentro (también llamado centro de gravedad del triángulo).

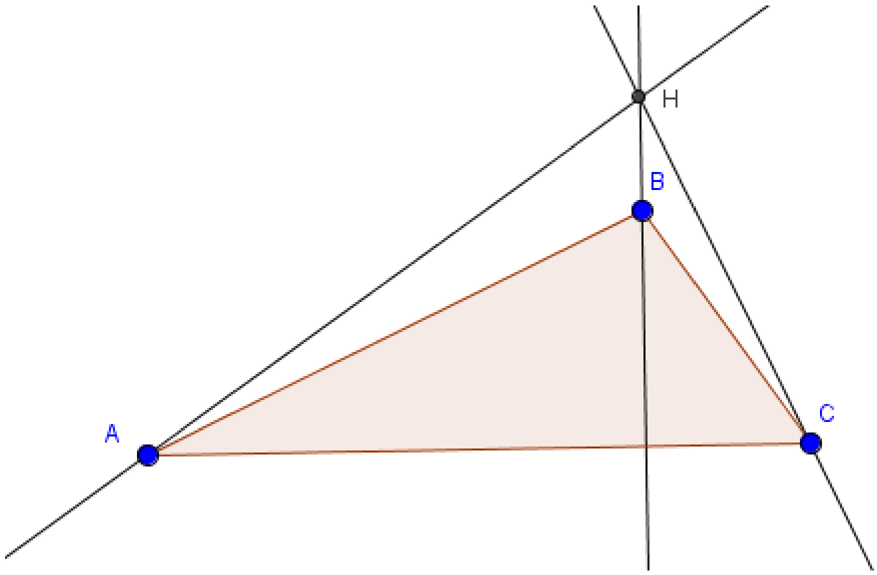


Alturas:

Las alturas son las rectas perpendiculares a cada lado por el vértice opuesto, por lo que basta utilizar la herramienta **Recta perpendicular** para trazarlas.



Una vez seleccionada la herramienta basta marcar el lado y el vértice opuesto para obtener la altura. De manera similar se obtendrán las otras dos alturas.



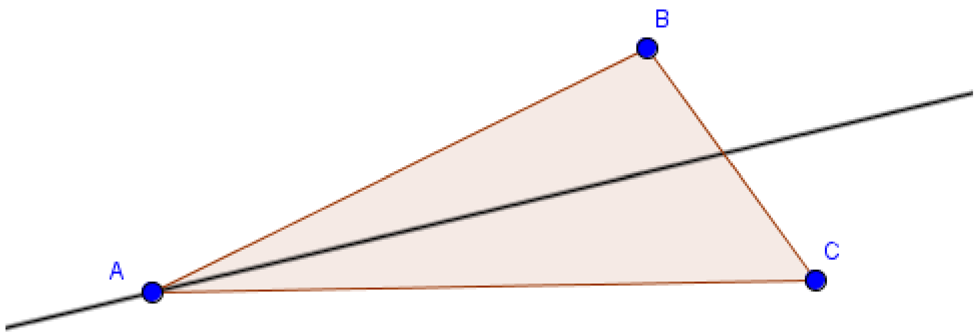
Las tres alturas se cortan en un punto denominado ortocentro.

Bisectrices:

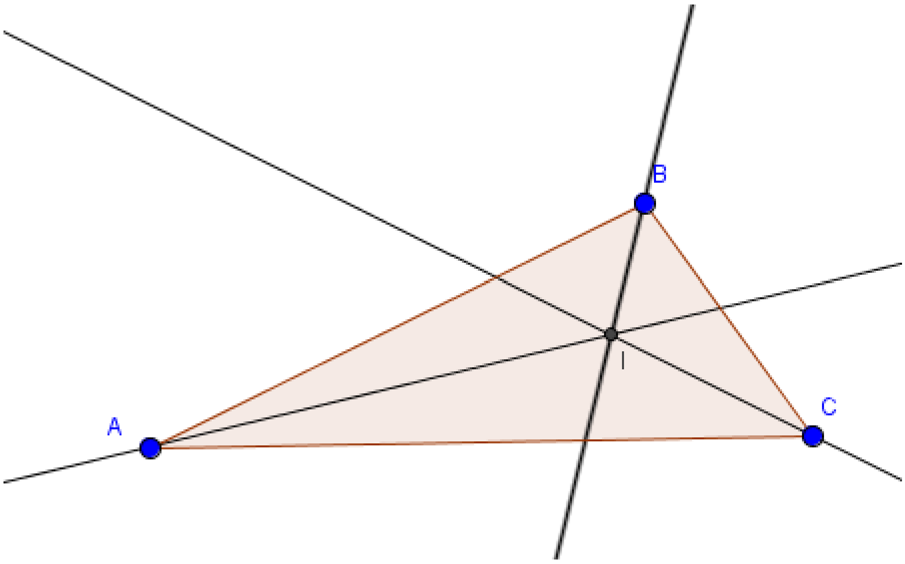
GeoGebra ofrece una herramienta para obtener la bisectriz de un ángulo que podemos utilizar para obtener las bisectrices de un triángulo.

Una vez seleccionada la herramienta Bisectriz hay que pulsar sobre los tres puntos que determina el ángulo, de manera que el punto marcado en segundo lugar será el vértice del ángulo sobre el que se trazará la bisectriz.

Por ejemplo, si en el triángulo ABC, marcamos los puntos B, A y C, en este orden, obtendremos la bisectriz por el vértice A.



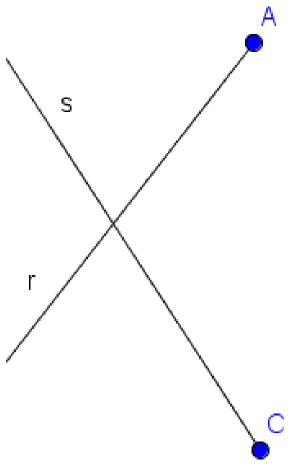
De manera análoga se obtendrán las otras dos bisectrices.



El punto de corte de las bisectrices se denomina incentro que es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

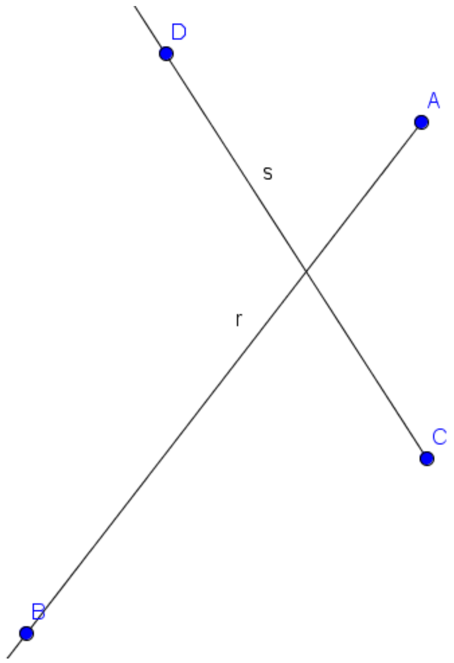
Actividades de investigación

c) Las rectas r y s son las alturas del triángulo ABC en los vértices A y C. Determina el vértice que falta y construye el triángulo

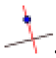


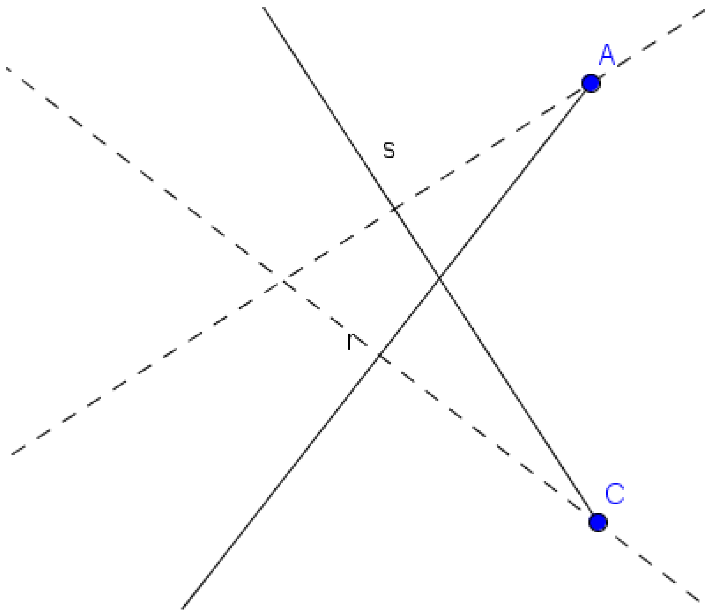
Resolvemos esta actividad. Para ello, comenzamos dibujando las dos semirrectas utilizando la herramienta **Semirrecta**  .

Tendremos una situación parecida a la imagen siguiente:

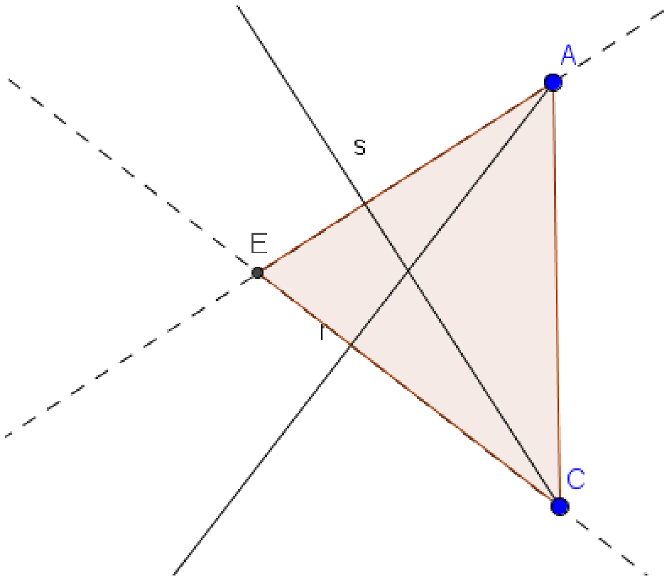


Para construir el triángulo necesitamos encontrar el tercer vértice. Sabemos que las alturas son perpendiculares a los lados por el vértice opuesto. Por tanto, trazamos la recta perpendicular a cada una de las semirrectas anteriores, por el otro punto que es uno de los vértices del triángulo buscado.

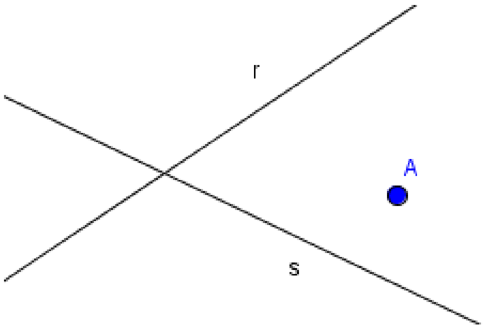
Utilizamos la herramienta **Recta perpendicular** . Las dos rectas aparecen con trazo discontinuo en la imagen siguiente:



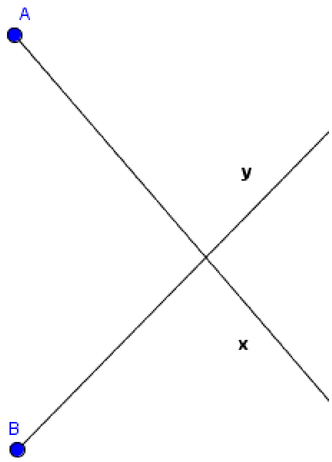
El tercer vértice será el punto de intersección de las dos rectas trazadas anteriormente, por lo que solo queda encontrarlo con la herramienta **Intersección**, dibujando a continuación el triángulo buscado.



d) Las rectas r y s son mediatrices de un triángulo ABC. Conocido el vértice A ¿cómo se pueden encontrar los otros dos vértices?



e) Las semirrectas Ax y By son dos bisectrices del triángulo ABC. Construye el triángulo



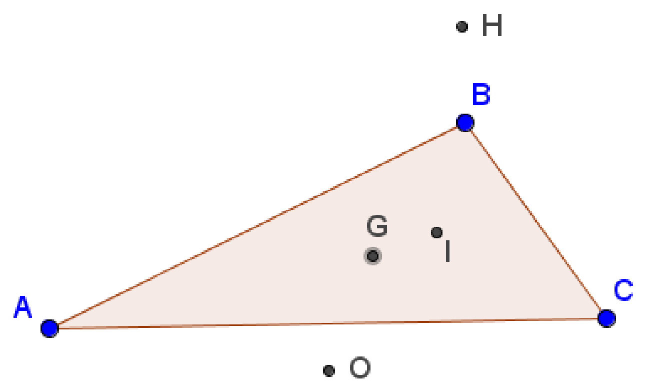
f) Define tres segmentos a, b y c de longitudes 3, 5 y 7, respectivamente. Construye el triángulo que tiene por lados a, b y c.

g) Define tres deslizadores entre 1 y 10 con un incremento de 0.1 de unidad y construye un triángulo que tenga por lados esos deslizadores. Mueve los deslizadores y contesta a las siguientes cuestiones

1. ¿Siempre podemos dibujar el triángulo?
2. Si a=3 y b=4 ¿Cuándo no está definido el triángulo?
3. ¿Qué condiciones deben cumplir los lados del triángulo para que éste se pueda definir?

POSICION DE LOS PUNTOS NOTABLES

Para responder a las siguientes cuestiones es aconsejable obtener los cuatro puntos notables de un triángulo (circuncentro O, baricentro G, ortocentro H e incentro I), ocultando en la construcción todos los objetos salvo el triángulo ABC y los puntos notables, tal y como aparece en la imagen siguiente:



Aprovechando las posibilidades que GeoGebra te ofrece para manipular una construcción, intenta responder las cuestiones siguientes:

a. Intenta averiguar si los cuatro puntos notables pueden estar alineados. ¿Qué condiciones son necesarias para que esto ocurra?

b. De los cuatro puntos hay algunos que siempre están dentro del triángulo sea cual sea éste. Indica cuáles son.

c. ¿Es posible que alguno de los puntos notables pueda estar situado sobre un lado del triángulo? Describe cuando ocurre y bajo qué condiciones.

d. Y con un vértice ¿puede coincidir alguno de los puntos notables? Indica de que punto o puntos se trata y describe si hay alguna relación con el tipo de triángulo dibujado.

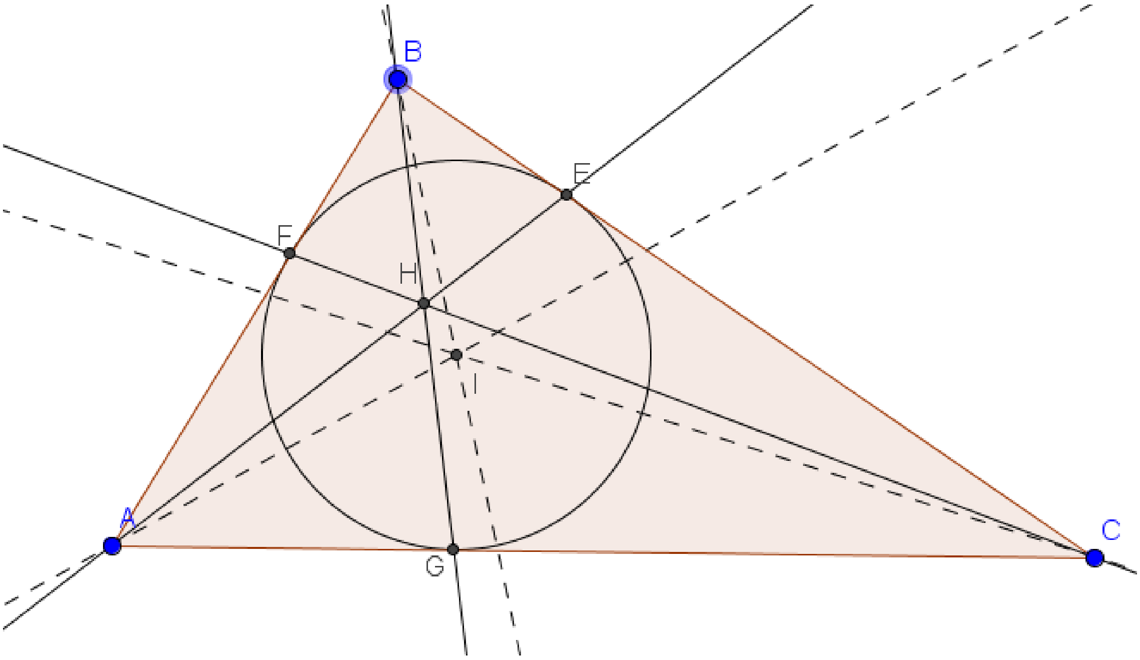
e. ¿Pueden coincidir los cuatro puntos notables? ¿Qué ocurre en este caso en el triángulo?

Como curiosidad, existen más de tres mil quinientos puntos o centros notables de un triángulo, cuya información podéis encontrar en Encyclopedia of Triangle Centers-ETC

A continuación os proponemos un ejemplo de uno de estos puntos.

Punto de Gergonne

Descubierto por el matemático francés Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), se obtiene como punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita.



El punto que aparece nombrado como H en la figura anterior es el punto de Gergonne.

Este punto cumple una gran cantidad de propiedades, de las que os proponemos comprobar la siguiente:

Los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita a un triángulo determinan un nuevo triángulo, en el que las rectas paralelas a los lados de este triángulo que pasan por el punto de Gergonne, cortan a los lados del triángulo inicial en seis puntos. Estas rectas son perpendiculares a las bisectrices del triángulo inicial.

Estos puntos, dos en cada lado del triángulo, pertenecen una circunferencia que es concéntrica con la circunferencia inscrita en el triángulo inicial. Esta circunferencia encierra al llamado círculo de Adams.

GeoGebra dispone de una gran cantidad de comandos que se ejecutan a través de la línea de entrada, lo que hace que aumenten sus posibilidades.

Uno de estos comandos es **CentroTriángulo** cuya sintaxis es:

CentroTriángulo[punto, punto, punto, índice]

Los puntos corresponden a los nombres o valores de los vértices del triángulo y el índice es el valor del centro que se desea obtener, según la numeración establecida en Encyclopedia of Triangle Centers-ETC.

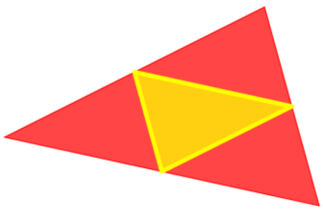
Por ejemplo, si ejecutamos el comando **CentroTriángulo[A,B,C,7]** obtendremos el punto de Gergonne.

Al consultar la ayuda que ofrece GeoGebra sobre este comando aparecen algunos de los valores de estos puntos.

Índice n	Centro
1	Incentro
2	Centroide
3	Circuncentro
4	Ortocentro
5	Centro en de la Circunferencia de Euler de los nueve puntos
6	Punto de Symmedian
7	Punto de Gergonne
8	Punto de Nagel
13	Punto de Fermat

TRIÁNGULO MEDIAL

En un triángulo ABC se denomina triángulo medial al triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.

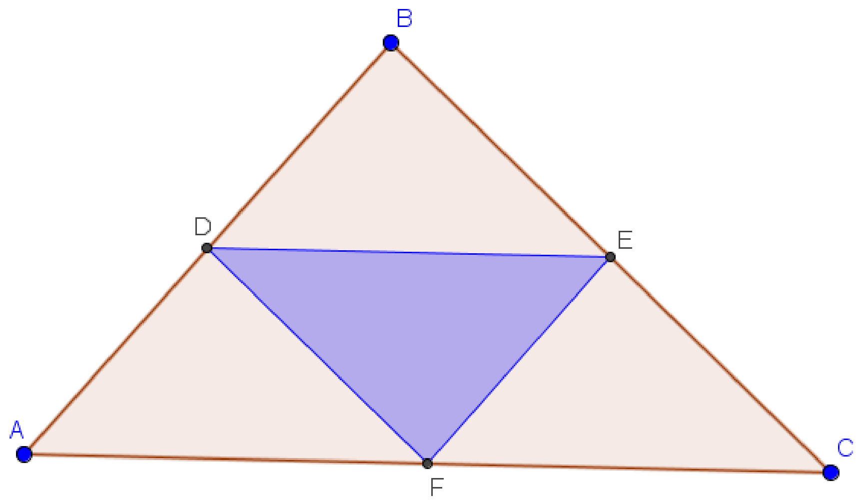


Comprobad que un triángulo y su triángulo medial tienen lados paralelos y por tanto serán triángulos semejantes.

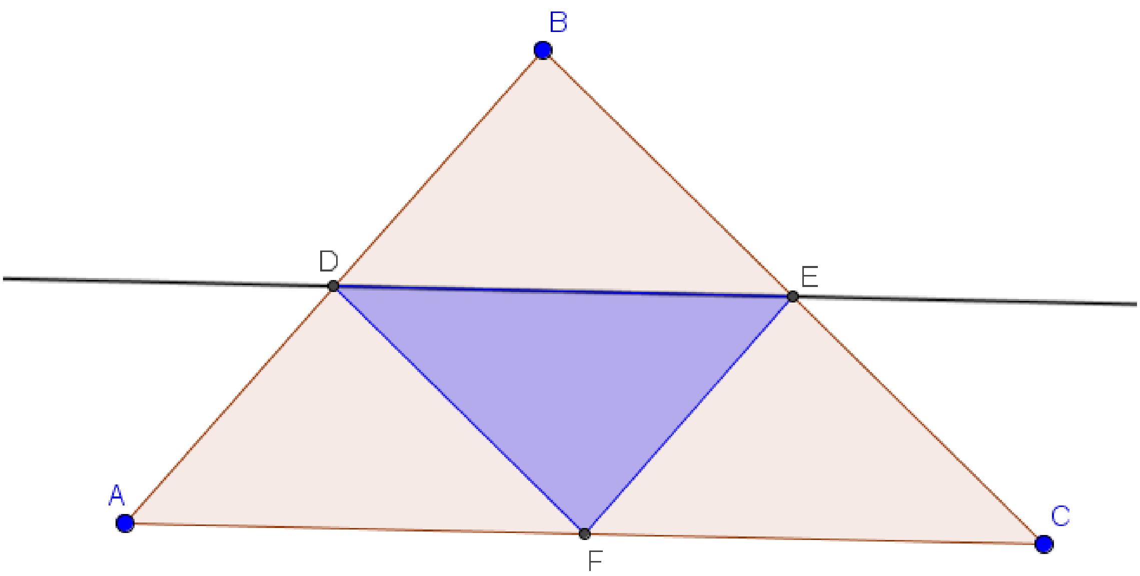
Además, ambos triángulos tienen el mismo baricentro y el ortocentro del triángulo medial es el circuncentro del triángulo original.

Vamos a intentar comprobar las relaciones anteriores. Para ello, dibujamos un triángulo cualquiera ABC, determinando los puntos medios de cada lado para construir a continuación, el triángulo medial.

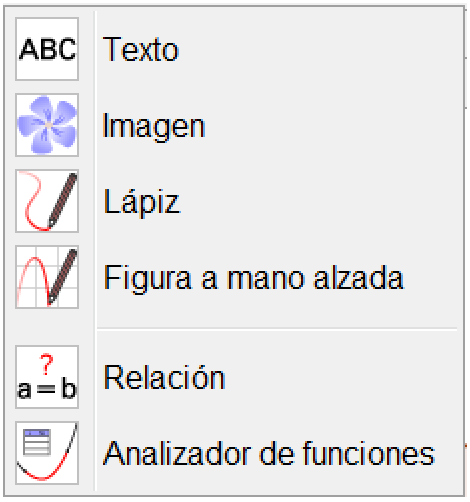
Los dos triángulos aparecen dibujados en la siguiente imagen:



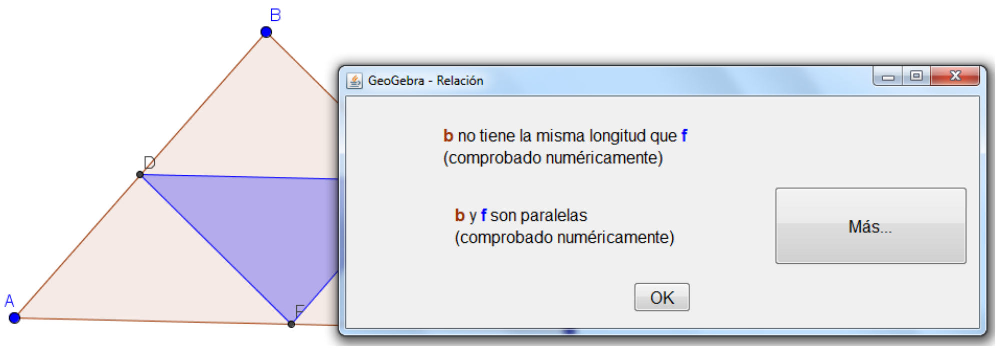
Una forma de comprobar que los lados de ambos triángulos son paralelos, podría consistir en trazar la recta paralela a un lado AC por el punto medio D, para observar que esta recta pasa por el otro punto E del lado del triángulo medial.



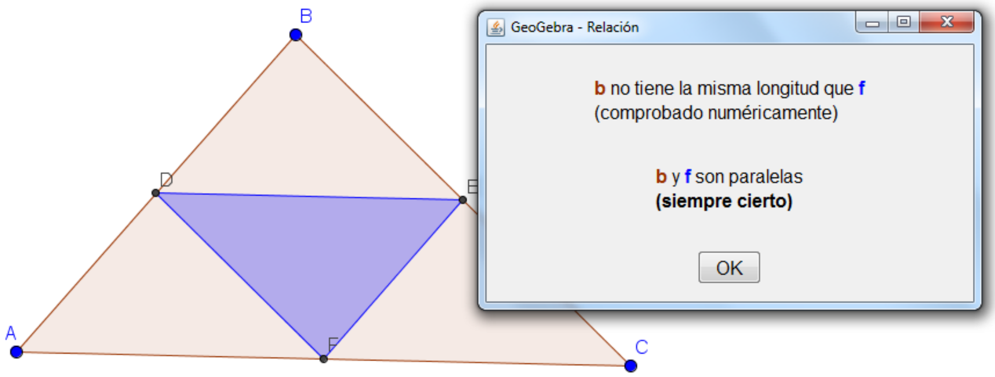
GeoGebra ofrece una herramienta que permite determinar ciertas relaciones entre los objetos de una construcción. Esta herramienta es **Relación** que encontramos en el bloque siguiente:



Una vez seleccionada esta herramienta basta hacer clic sobre los objetos de los que deseamos determinar su relación, en nuestro caso, podemos pulsar sobre el lado AC y sobre el lado DE. Aparecerá el cuadro de diálogo siguiente:

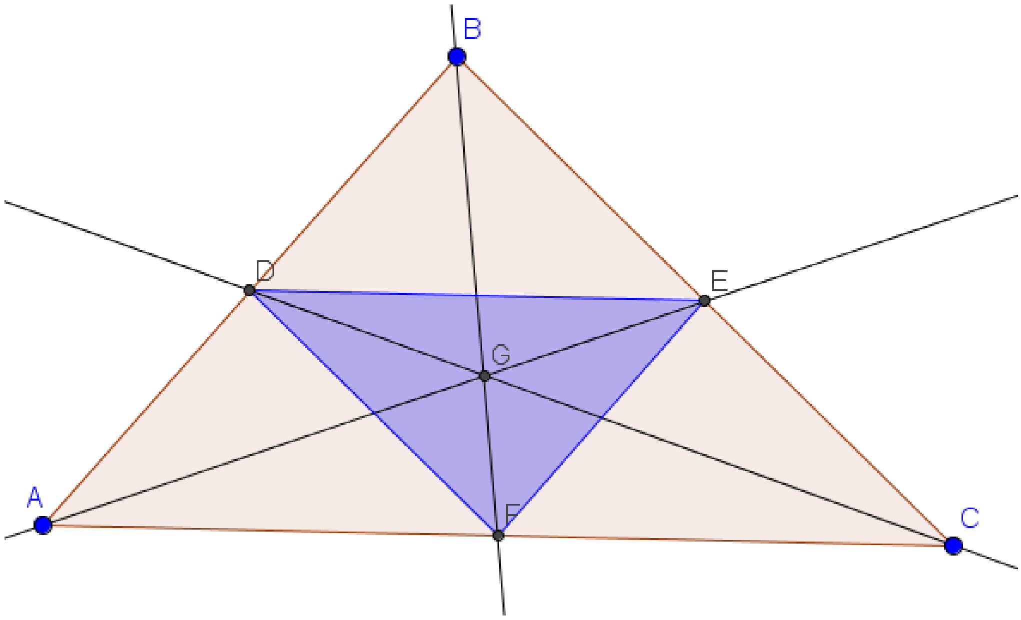


Al pulsar el botón **Más** aparecerá:

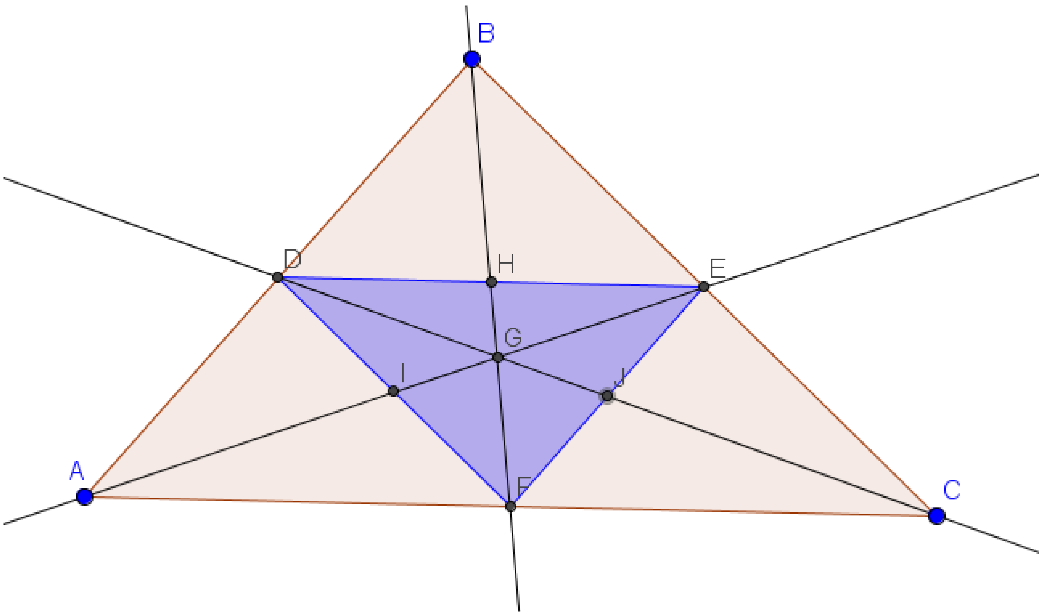


En el primer caso, ha comprobado de manera numérica que los dos segmentos son paralelos y en el segundo, nos indica que esta relación siempre es cierta.

A continuación, vamos a comprobar la relación entre los puntos notables de los dos triángulos. Obtenemos el baricentro del triángulo ABC.



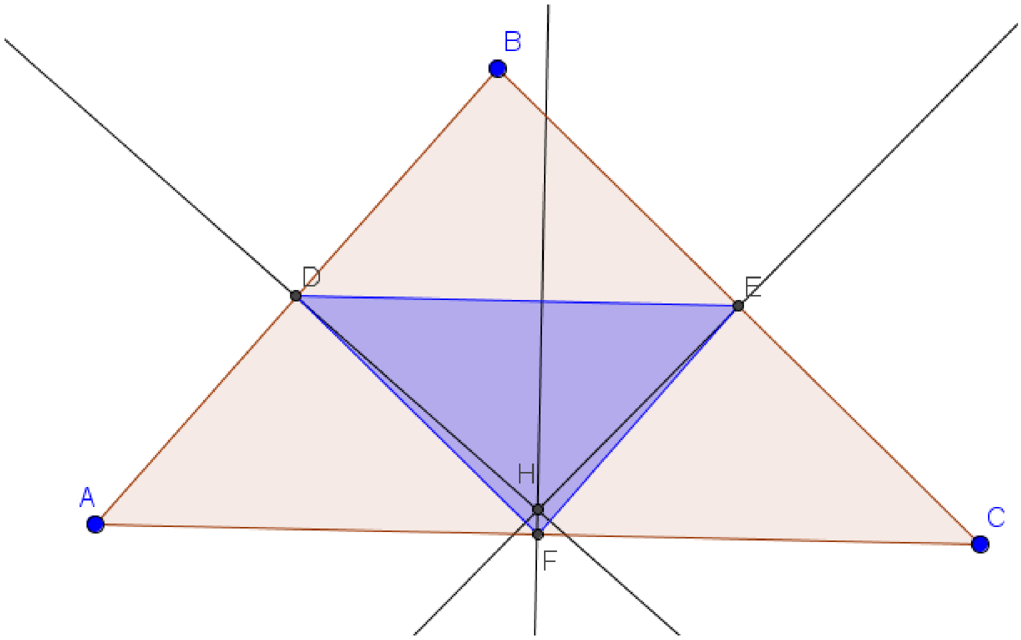
A continuación, determinamos los puntos medios de los lados del triángulo medial, como paso previo para obtener sus medianas.



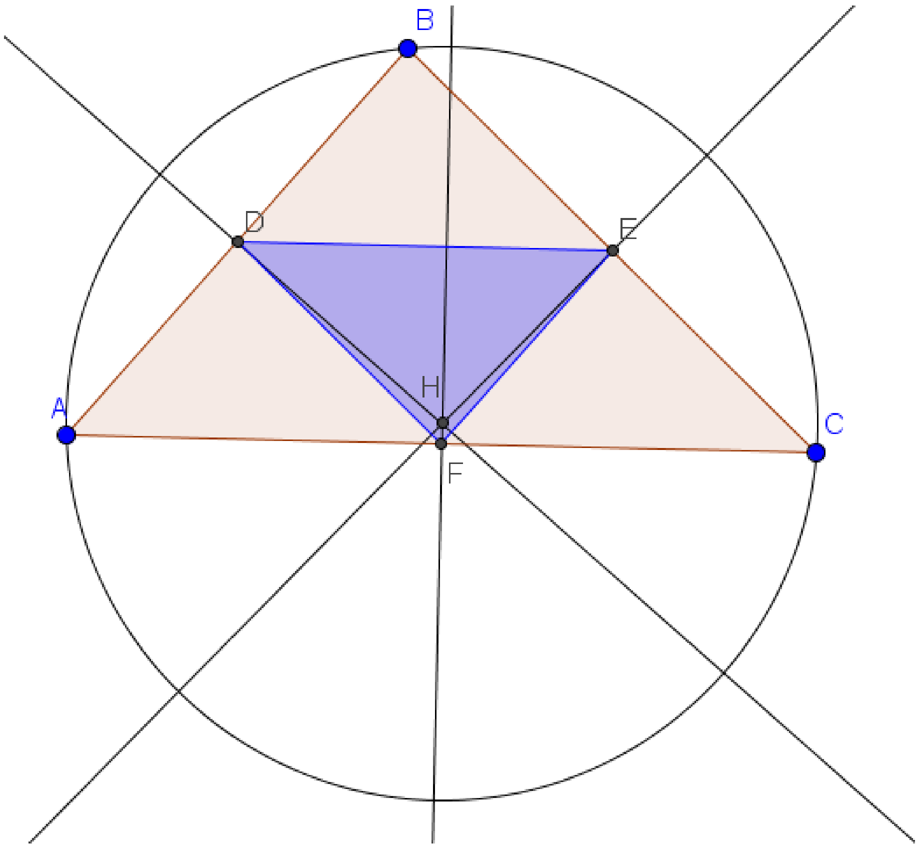
Observamos que están sobre las medianas del triángulo ABC, por lo que el punto de intersección será el mismo.

Por tanto, los dos triángulos tienen el mismo baricentro.

Para comprobar la segunda relación entre los puntos notables de ambos triángulos, obtenemos el ortocentro del triángulo medial trazando previamente sus alturas.



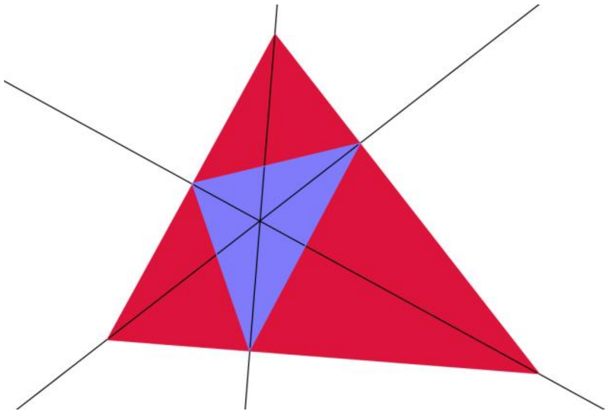
A continuación comprobamos que H es el circuncentro del triángulo ABC. Para ello, podemos trazar la circunferencia cuyo centro es H que pase por A.



Podemos observar que esta circunferencia también pasa por B y C. Por tanto, H es el circuncentro del triángulo ABC.

TRIÁNGULO ÓRTICO

En un triángulo ABC se denomina triángulo órtico al formado por los pies de las alturas del mismo



Dibuja un triángulo cualquiera y su triángulo órtico para comprobar los siguientes resultados:

a. De entre todos los triángulos que tienen sus vértices en los lados del triángulo ABC, el triángulo órtico es el de perímetro mínimo

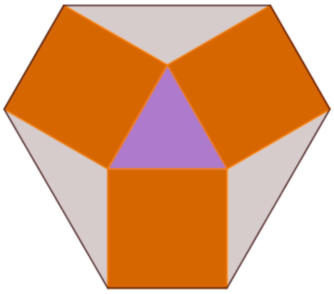
b. Si el triángulo ABC es acutángulo, el ortocentro del Triángulo original es el Incentro del Triángulo Órtico

c. Los lados del triángulo órtico son paralelos a los del triángulo A'B'C' que se obtiene trazando rectas tangentes a la circunferencia circunscrita en los vértices del triángulo original ABC

CONSTRUCCIONES

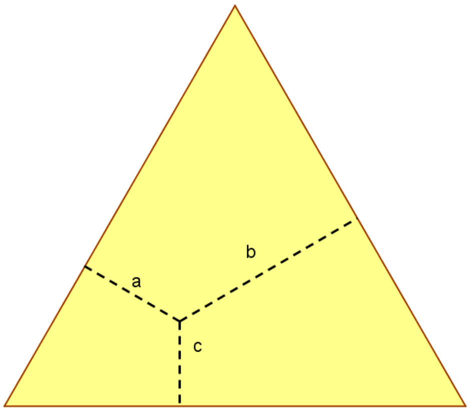
Construcción 1

Sobre cada lado de un triángulo equilátero se construyen tres cuadrados tal como indica la figura. Los seis nuevos vértices forman un hexágono. Hallar el área y el perímetro del hexágono si el lado del triángulo es de 2 unidades



Construcción 2

El teorema de Viviani, llamado así en honor de *Vincenzo Viviani*, enuncia que la suma de las distancias desde un punto cualquiera interior a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo

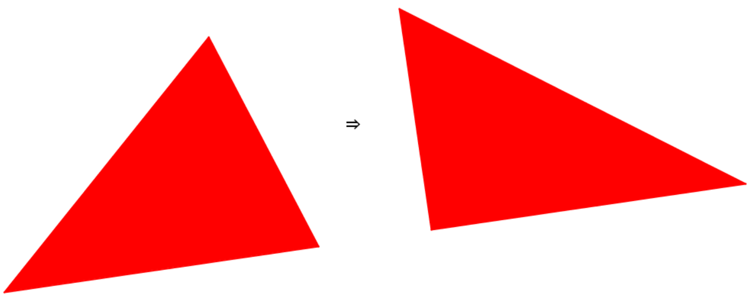


a+b+c = Altura Triángulo

Dibuja un triángulo cualquiera y comprueba el teorema de Viviani

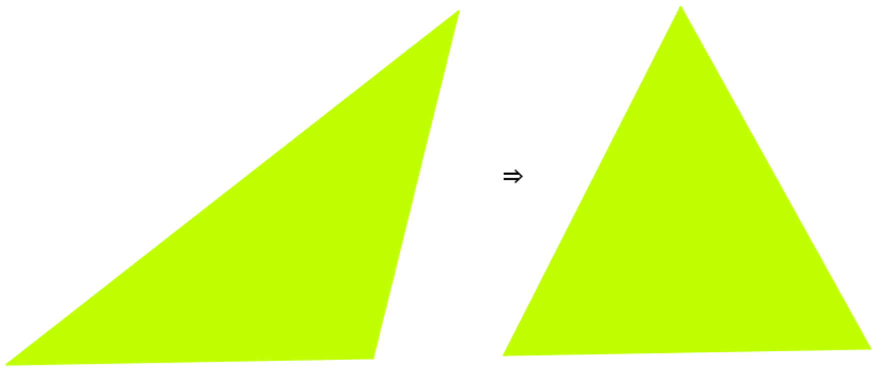
Construcción 3

Dibuja un triángulo cualquiera ABC. Realiza la siguiente transformación: Construye un triángulo rectángulo cuya área sea igual a la del triángulo ABC inicial



Construcción 4

Dibuja un triángulo cualquiera y realiza la siguiente transformación: Construye un triángulo isósceles de igual área



ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN

A) Dados dos puntos A y B. ¿Cuántos triángulos rectángulos puedes dibujar de forma que tengan esos dos puntos como vértices

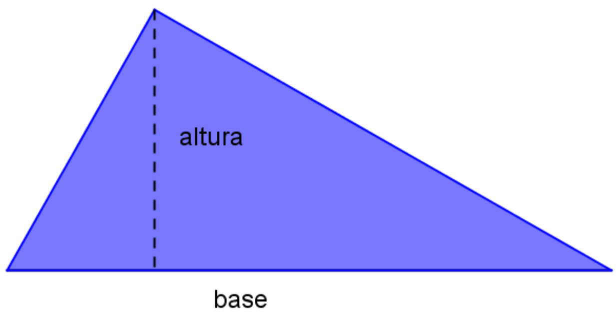
B) Si los puntos A y B anteriores son los que determinan la hipotenusa. ¿Cuántos triángulos rectángulos puedes construir?

C) Si conocemos la base y la altura de un triángulo. ¿Cuántos triángulos rectángulos podemos construir?

D) Construye un triángulo rectángulo cuya base sea igual a la altura. Identifica el triángulo con una herramienta de dibujo. Ahora haz igual pero cuando la base sea doble de la altura

E) Con lados que miden 3, 4 y 5 unidades podemos construir un triángulo rectángulo. Encuentra otras ternas de números naturales con los que puedas construir triángulos rectángulos y construye dichos triángulos

F) Dibuja un triángulo rectángulo y apóyalo sobre su hipotenusa. ¿Cuántos triángulos diferentes puedes construir que tengan la misma base y la misma altura que el triángulo que has construido?
Dibuja esos triángulos



RECTAS SOBRE TRIÁNGULOS

Recta de Euler

El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo están alineados. La recta que pasa por estos tres puntos es la recta de Euler.

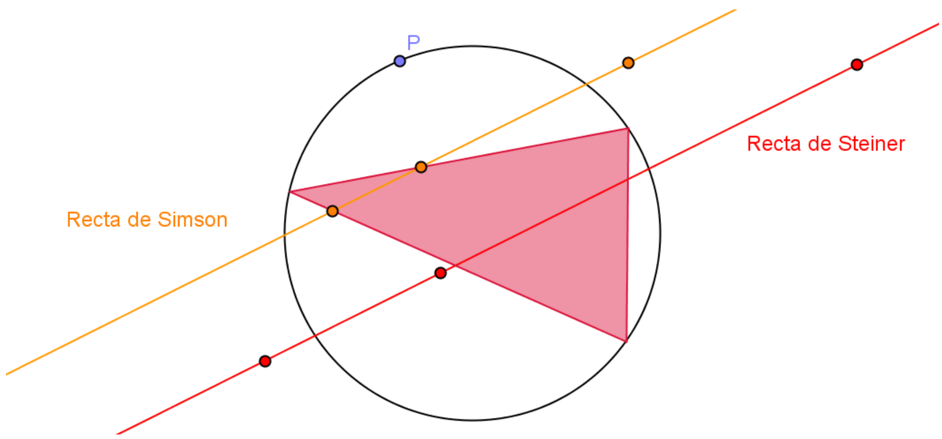
Dibuja un triángulo cualquiera ABC y encuentra su recta de Euler y describe qué ocurre cuando la recta de Euler pasa por un vértice.

Recta de Simson

Dado un punto cualquiera P de la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC, los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo desde el punto P están alineados. Una recta de Simson en un triángulo es cualquier recta que une los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo, trazadas desde un punto de la circunferencia cinscunscrita del triángulo.

Recta de Steiner

Dado un punto cualquiera P de la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC, los puntos simétricos de P respecto de los lados del triángulo están alineados. Una recta de Steiner en un triángulo es cualquier recta que une los simétricos de un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita respecto de los lados del triángulo.



Traza las rectas de Steiner y de Simson en un triángulo cualquiera ABC y comprueba las siguientes relaciones:

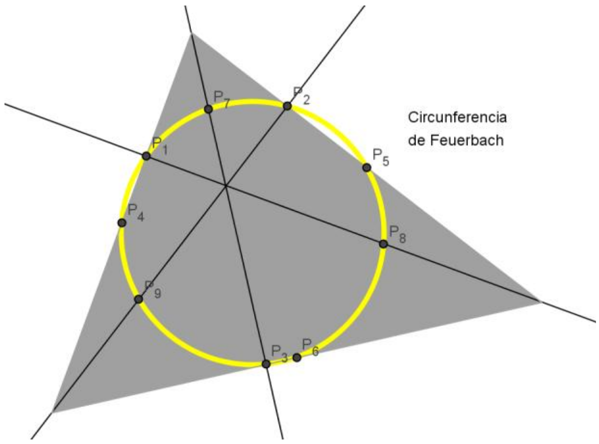
a. Comprueba que la recta de Steiner pasa por el ortocentro del triángulo.
b. Verifica que las rectas de Simson y de Steiner construidas sobre un mismo punto P son paralelas.

CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS (Circunferencia de Feuerbach)

Los pies de las tres alturas de cualquier triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro están en una circunferencia que recibe el nombre de circunferencia de los nueve puntos.

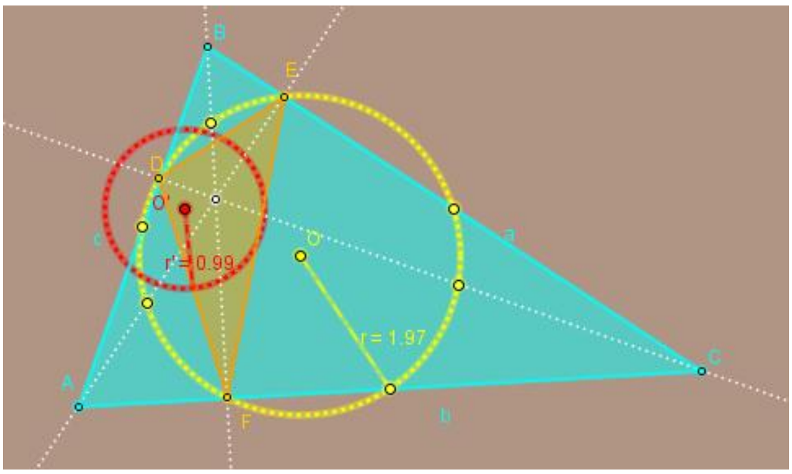
Dibuja un triángulo cualquiera ABC y encuentra los nueve puntos que definen la circunferencia, construye dicha circunferencia y comprueba las siguientes propiedades:

a. El radio de la circunferencia de los nueve puntos es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita.
b. El centro de la circunferencia de los nueve puntos en un triángulo ABC es el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro.



TRIÁNGULO ÓRTICO Y CIRCUNFERENCIA DE FEUERBACH

Sea ABC un triángulo cualquiera y A’B’C’ su triángulo órtico. Comprueba que si construimos las circunferencias de los nueve puntos en cada uno de los triángulos anteriores, el original y el órtico, éstas cumplen que el radio de la circunferencia de Feuerbach del triángulo original ABC es doble del radio de la circunferencia de Feuerbach del triángulo órtico A’B’C’.



TEOREMAS SOBRE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Intenta comprobar los siguientes teoremas con ayuda de GeoGebra.

Teorema del cateto

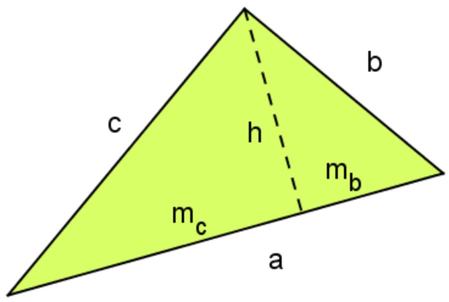
En cualquier triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Teorema de la altura

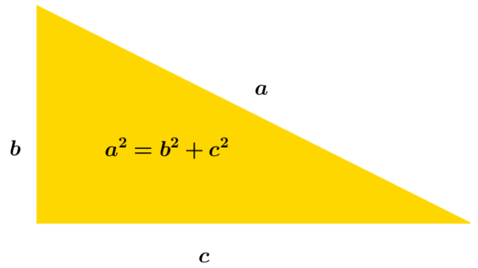
En cualquier triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que dividen a ésta.

Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS



a. Dibuja un triángulo rectángulo y sobre sus lados construye cuadrados. Comprueba el área del cuadrado construido sobre la circunferencia es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.
b. Si construimos en lugar de cuadrados pentágonos. ¿Se seguirá cumpliendo la propiedad? Es decir, ¿el área del pentágono construido sobre la hipotenusa será igual a la suma de las áreas de los pentágonos construidos sobre los catetos?
c. ¿Qué crees que ocurrirá si construimos octógonos regulares? Compruébalo.

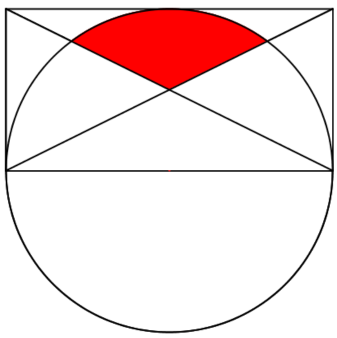
d. ¿Puedes decir si el resultado será válido para otras figuras? Comprueba tus resultados con GeoGebra. Intenta generalizar el teorema para un polígono regular de n lados utilizando un deslizador.
e. Finalmente, si con los lados de un triángulo rectángulo se construyen tres cubos de lado la medida de cada uno de los lados del triángulo. ¿El volumen del cubo mayor será igual a la suma del volumen de los cubos menores? ¿De qué teorema estamos hablando?

CONSTRUCCIONES

A continuación proponemos un par de construcciones domo preparación para los retos que te plantearemos en este tema.

Construcción 1

Reproduce la siguiente figura sabiendo que el rectángulo tiene de dimensiones doble de lado. Trata de encontrar relaciones entre las áreas y perímetros entre las partes en las que ha quedado dividida la figura.



Construcción 2

Dibuja un triángulo rectángulo cualquiera y dentro de él otro triángulo rectángulo que tenga sus vértices sobre los lados del triangulo inicial y busca relaciones entre las áreas de los dos triángulos.