

Problemas – Tema 3

CCSS Problemas resueltos - 3 - sistemas con parámetro

1. Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$.

a) Planteamos la matriz ampliada del sistema y triangulamos por Gauss. Recuerda que si, al transformar alguna línea, aparece en la ecuación de transformación el parámetro m , debemos **estar atentos al obtener los resultados finales por si algún valor está inhabilitado** (ya que no podemos multiplicar por 0 la línea que estamos transformando).

¿Qué transformaciones podemos aplicar? **Transformaciones lineales**. Es decir: sumar/restar líneas paralelas entre sí y/o multiplicar una línea por un número real no nulo. Si durante el proceso aparece una fila nula, e elimina. Y si aparecen dos filas iguales o proporcionales, también se elimina una de ellas.

Estas transformaciones lineales garantizan que **el sistema resultante es equivalente al sistema de partida**, es decir, tienen las mismas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1, \quad F'_3 = F_3 - 2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & m-2 & -2m-1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3 = F_3 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & -m-2 & -4 \end{pmatrix}$$

Discusión de casos (es vital **mirar las posiciones a_{33} , a_{22} y a_{11} en la matriz triangular**. Y si una fila tiene todos los coeficientes nulos, salvo el término independiente, también debemos mirar si en ese término independiente aparece el parámetro).

¡Fundamental! El rango del sistema, tras aplicar Gauss y siempre que no aparezcan absurdos matemáticos, es el número de ecuaciones no nulas.

Si el rango coincide con el número de incógnitas, tendremos SCD y solución única.

Si el rango es menor que el número de incógnitas, tendremos SCI e infinitas soluciones. El número de parámetros libres coincide con la diferencia del número de incógnitas y el rango.

Y si encontramos un absurdo matemático, tendremos SI sin solución.

Planteamos la discusión de casos.

- Si $-m-2=0 \rightarrow m=-2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \rightarrow$ Incongruencia en $F_3 \rightarrow$ No hay solución $\rightarrow$ Sistema Incompatible
- Si $m-2=0 \rightarrow m=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \rightarrow F_3$ es combinación lineal de F_2 , por lo que el sistema equivalente resulta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$ Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas $\rightarrow$ Infinitas soluciones, ya que el rango del sistema es 2, y al tener 3 incógnitas, tendremos un Sistema Compatible indeterminado con un parámetro libre. Recuerda que **una línea L_i es combinación lineal de otra línea paralela o de otras líneas paralelas si podemos expresar esa línea L_i como suma/resta de las otras líneas y/o proporcional a otra línea**. En este caso, podremos obviar en la resolución la línea que es combinación lineal, ya que no aporta información nueva al sistema de ecuaciones.
- Si $m \neq -2$ y $m \neq 2 \rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado, ya que llegamos a **tres ecuaciones no nulas en la sistema triangulado de tres ecuaciones y tres incógnitas, que no son combinación lineal entre sí**. El rango del sistema es tres, lo cual coincide con el número de incógnitas, por lo que la solución será única.

b) Para $m=2$ ya hemos razonado que tenemos infinitas soluciones al ser S.C.I. con un parámetro libre. Para resolver **damos a una de las incógnitas el valor arbitrario del parámetro**, e intentamos escribir las otras incógnitas en función de ese parámetro.

Si resulta que la incógnita a la que hemos igualado al parámetro libre toma un valor real fijo después de operar y resolver en el sistema, significa que no puede ser parámetro libre, por lo que igualaremos otra incógnita al parámetro.

El sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas al que llegamos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow z=1, y=\lambda \rightarrow x=-1-\lambda$$

2. Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x - y + m \cdot z = 0 \\ m \cdot x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2m \cdot z = 0 \end{cases}$$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m = -2$.

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2m & 0 \end{array} \right) \rightarrow F'_2 = F_2 - mF_1, \quad F'_3 = F_3 + F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 2+m & 1-m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3m & 0 \end{array} \right)$$

Discusión de casos:

- Si $m = 0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ Infinitas soluciones $\rightarrow$ S.C.I.
- Si $m = -2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow F_3$ es combinación lineal de $F_2 \rightarrow$ obtenemos el sistema equivalente $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ Infinitas soluciones $\rightarrow$ S.C.I.
- Si $m \neq 0, m \neq -2 \rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ S.C.D.

b) Para $m = -2$, como ya analizamos $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ Infinitas soluciones $\rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow z = 0 \rightarrow y = \lambda \rightarrow x = \lambda$