

I/ Définition :

Lorsque l'on effectue une expérience aléatoire, on peut définir une variable aléatoire rassemblant tous les résultats possible. Cette variable est discrète lorsqu'elle prend un nombre fini de valeurs. Par opposition à une variable continue qui elle peut prendre un nombre infini de valeur.

Pour résumer, une variable aléatoire est un nombre associé au résultat d'une expérience aléatoire. On connaît toutes les valeurs que pourra prendre ce nombre et on peut calculer les probabilités de ces différentes valeurs.

Exemple :

On lance un dé à six faces, si on obtient 1 on perd 3€, si on obtient un nombre pair on gagne 1€ et sur les autres résultats on ne perd et on ne gagne rien.

A ce jeu, nous pourrions associer la variable aléatoire X correspondant au gain. Celle-ci peut prendre uniquement trois valeurs :

- **-3** si l'on perd trois euros. Que l'on notera : $\{(X = -3) = 1\}$ qui signifie que pour avoir $X = -3$, il faut obtenir un 1 sur le dé.
- **0** si on ne gagne rien. Que l'on notera : $\{(X = 0) = 3 ; 5\}$ qui signifie que pour avoir $X = 0$, il faut obtenir 3 ou 5 sur le dé.
- **1** si on gagne un euro. Que l'on notera : $\{(X = 1) = 2 ; 4 ; 6\}$ qui signifie que pour avoir $X = 1$, il faut obtenir 2, 4 ou 6 sur le dé.

II/ Loi de probabilité :

Définition :

Définir une loi de probabilité c'est associer à chaque valeur x_i de la variable aléatoire une probabilité p_i , telle que la somme des p_i soit égale à 1.

Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$p_i = P(X = x_i), \text{ avec } 0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Déterminer la loi de probabilité de X , c'est donner sous forme de tableau, toutes les valeurs de X et leurs probabilités associées.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Exemple :

Pour notre jeu défini précédemment, supposons que le dé soit parfaitement équilibré. Chaque face a autant de chance de sortir que les autres. Et chaque face a une probabilité d'apparition de $\frac{1}{6}$.

Calculons les probabilités pour chaque valeur de X :

- $X = -3$ ne se produit que pour un résultat de 1 sur le dé. Donc $p(X = -3) = \frac{1}{6}$.
- $X = 0$ ne se produit que pour un résultat de 3 ou 5. Donc $p(X = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- $X = 1$ ne se produit que pour un résultat de 2, 4 ou 6. Donc $p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Vérifions que la somme des probabilités soit bien égale à 1 :

$$p(X = -3) + p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

Nous obtenons donc la loi de probabilité suivante :

x_i	-3	0	1
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

III/ Espérance d'une variable aléatoire :

L'espérance d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs x_i , pondérées par leurs probabilités :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

Cela représente ce que l'on gagne « virtuellement » à chaque partie. Autrement dit si l'espérance de gain d'un jeu est de 1 €, cela veut dire que en théorie, à chaque partie c'est comme si l'on gagnait 1 €.

Exemple :

Calculons l'espérance dans notre jeu :

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

Si on jouait un grand nombre de fois à ce jeu, nous ne gagnerions pas d'argent, mais nous n'en perdrons pas. On dit que le jeu est équitable, car il ne favorise personne.