

5 Arc

5.21 Arc sobre arc. Gaudí. Garraf

El 1882 l'arquitecte Antoni Gaudí (1852-1926) en una finca situada a la carretera de Barcelona a Callafell, en el terme de Sitges i propietat d'Eusebi Güell, va projectar en un principi un pavelló per a caçadors i, posteriorment, el 1895, un edifici destinat a celler. Des d'antic ha existit una polèmica sobre si el projecte era de Gaudí o de Francesc Berenguer però, finalment, l'autoria del projecte s'ha assignat a Gaudí. L'edifici té un aspecte militar (fig. 5.61) allunyat de l'estil característic de Gaudí i està construït amb pedra del propi massís de Garraf. D'aquest espai arquitectònic ressaltem el conjunt d'arcs que es troben associats a l'edifici principal (fig. 5.62) i que serà l'objecte d'aquest estudi, que quedarà reflectit en dues aplicacions, utilitzant el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

Actualment el celler Güell és una propietat privada. En certs moments va ser utilitzat com a restaurant, però actualment no té un ús concret. Per tant, no ha estat possible fer una inspecció de reconeixent, ni tan sols una visita turística. Això vol dir que algunes qüestions, com les escales geomètriques o mecàniques, s'han efectuat a sentiment. Al full de càlcul de les aplicacions, aquestes qüestions no definides queden suficientment indicades perquè fàcilment es puguin adequar a noves circumstàncies si una inspecció acurada del celler així ho permet.

Objectius. Els objectius del present estudi són diversos:

- .1. Observar si la forma dels arcs respon al conjunt de sol·licitacions a què estan sotmesos.
- .2. Determinar si les tensions que es produeixen en els elements constructius, i concretament a les dovelles que formen els arcs, tenen valors admissibles.
- .3. Determinar l'estabilitat del conjunt.
- .4. Atès que el programa GeoGebra no té els recursos necessaris per a l'anàlisi del conjunt, s'haurà de descompondre el conjunt en dues parts, cosa que implicarà dues aplicacions GeoGebra que necessàriament hauran d'estar relacionades entre sí.

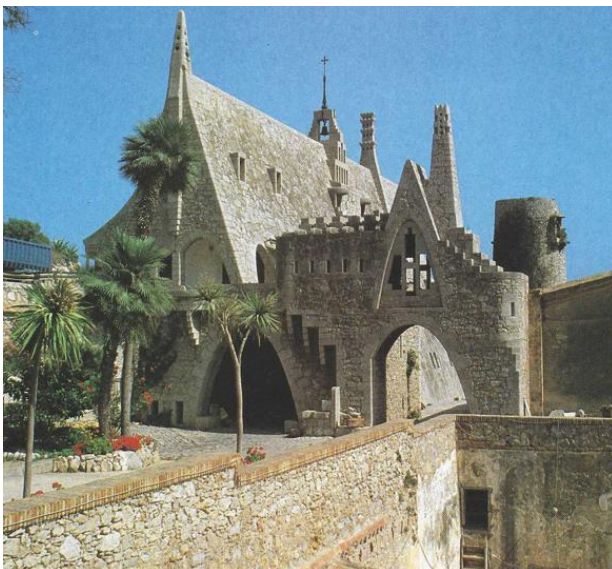


Fig. 5.61



Fig. 5.62

Com a curiositat, s'inclouen unes fotografies (fig. 5.63, 5.64 i 5.65) de l'arxiu de Rossend Flaquer i Barrera (1873-1947). Són fotografies de gelatina i plata sobre vidre realitzades entre els anys 1920 i 1921, és a dir, abans que Gaudí morís (1926).



Fig. 5.63



Fig. 5.64



Fig. 5.65

Geometria. Es tracta d'arcs formats per dovelles. En realitat són quatre arcs, dos superiors i dos inferiors, ubicats en plans verticals i paral·lels. Aquests estan separats una certa distància en el que es troben elements constructius i arquitectònics (fig. 5.66). Els arcs superiors s'entreguen directament en els inferiors observant una simetria en referència a l'eix de la separació entre arcs, de tal manera, que la façana anterior es idèntica a la posterior (fig. 5.67). L'arc inferior es



Fig. 5.66

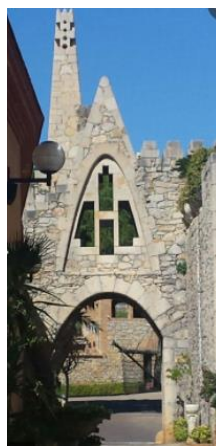


Fig. 5.67

troba escapçat per una línia vertical que, com es veurà més endavant, té una raó mecànico-estructural, atès que l'arc ja no és necessari. L'arc o arcs superiors, a diferència dels inferiors, són simètrics amb referència a un eix vertical que passa per la clau. Aquesta simetria no només es contempla en la forma de l'arc, sinó també en la forma i disposició de les dovelles. Curiosament, la clau és una dovella en forma de falca. Les amplades dels arcs han estat de $b_s = b_i = 0.30$ m, tant del superior com de l'inferior. La llum lliure entre arcs ha estat d' $e = 1.2$ m.

Identificació. Abans que procedir a calcular els arcs, sembla necessari identificar-los per la seva forma o geometria. S'utilitza l'aplicació '5.5 Arc. Identificació'. Aquesta aplicació és una versió amb GeoGebra de la tesi doctoral 'Geometria i mecànica en els models de Gaudí' que Jaume Serrallonga i Gasc escriu el 2003. Serrallonga proposa identificar la cònica que perfila l'arc simètric amb referència a un eix vertical que passa per la clau, de la forma més simple possible, a partir de dos punts i una tangent i no de cinc punts com es fa de forma convencional. Aquests punts, que s'han d'ajustar a l'arc prèviament definit en una fotografia de fons, són:

- .C. Punt a la clau. La tangent és horitzontal.
- .P. Punt qualsevol que passa (o s'insinua) per l'arc.
- .T. És la tangent a l'arc pel punt P. No es tracta d'un punt en el sentit estricte del terme.

Altres detalls de la identificació dels arcs es troben a la memòria i al vídeo que acompanya a l'aplicació 5.5. La utilització del sistema de Serrallonga ha donat com a resultat que l'arc superior es una hipèrbola (fig. 5.68) i l'arc inferior, suposant que es tractés d'una cònica no truncada, una el·lipse (fig. 5.69)

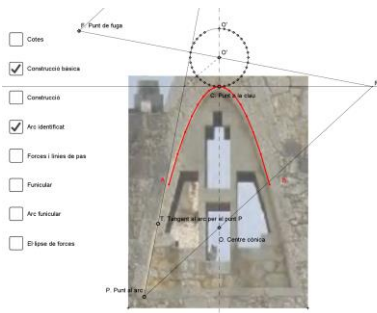


Fig. 5.68

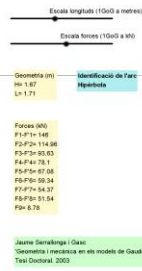


Fig. 5.69

Una altra manera d'identificació dels arcs, sempre que aquests provinquin d'una cònica, la trobem en el propi programa GeoGebra amb la instrucció 'Tipus'. En efecte, col·locats 5 punts a la foto que representa l'arc, tindrem l'equació i el nom de la cònica que passa per aquests 5 punts (fig. 5.70 i 5.71). La instrucció 'Tipus', del nom de la cònica, ens donarà un número que l'identificarà (fig. 5.72).



Fig. 5.70

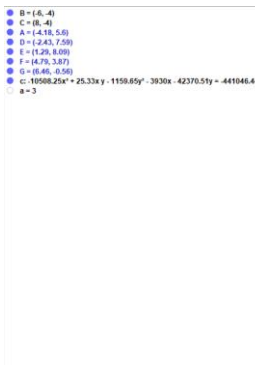
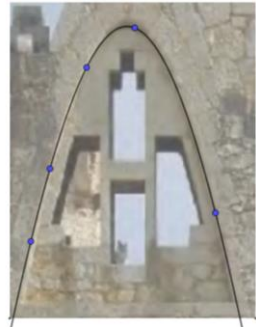


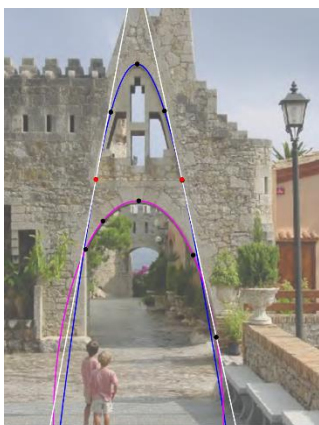
Fig. 5.71



Value	Type of conic	Type of quadric
1	Single point	Single point
2	Intersecting lines	
3	Ellipse	Ellipsoid
4	Circle	Sphere
5	Hyperbola	
6	Empty	Empty
7	Double line	
8	Parallel lines	
9	Parabola	Paraboloid
10	Line	Line
30		Cone
31		Cylinder
33		Plane
34		Parallel planes
35		Intersecting planes
36		Hyperboloid of one sheet
37		Hyperboloid of two sheets
38		Parabolic cylinder
39		Hyperbolic cylinder
40		Hyperbolic paraboloid

Fig. 5.72

La tangent comú. En els arcs estudiats del celler Güell es dona una circumstància extraordinària.



A la zona dreta dels arcs, on aquests són complets, apareix una tangent comú (fig. 5.73). Aquesta circumstància, apart de ser una curiositat geomètrica, és especialment una qüestió arquitectònica. Efectivament, els arcs apareixen amb una continuïtat i harmonia que no seria possible d'altra manera.

Fig. 5.73

Les dues aplicacions GeoGebra. Com s'ha dit als objectius, s'han d'utilitzar dues aplicacions GeoGebra per fer l'anàlisi dels dos arcs del celler Güell, una per a l'arc superior i una altra per a l'inferior. Contradient les propietats bàsiques de GeoGebra, únicament existeixen 6 punts mòbils, tres per a l'arc superior A_s , B_s i C_s i tres per a l'arc inferior A_i , B_i i C_i . El resultat final és una línia de pressió que passa pels punts A_s , B_s i C_s en l'arc superior (fig. 5.74) i pels punts A_i , B_i i C_i en l'arc inferior (fig. 5.76). El procés de construcció d'aquestes línies de pressió ha estat el següent.

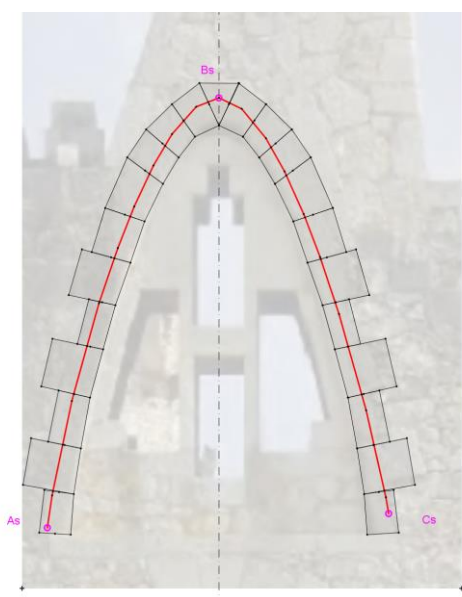


Fig. 5.74

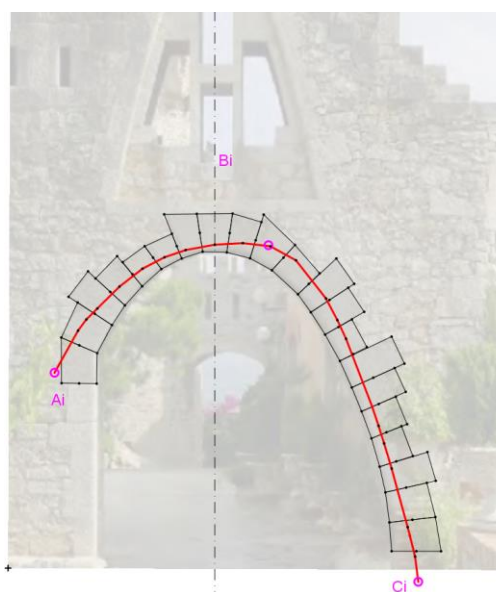


Fig. 5.76

Arc superior (fig. 5.75).

.1. Geometria. Les distàncies o cotes en els arcs es controlen per escales que converteixen distàncies de GeoGebra en metres. En les dues aplicacions, l'escala geomètrica és la mateixa. Igualment, cadascuna de les aplicacions disposa d'una regleta idèntica per mesurar distàncies.

.2. Càrregues. Les càrregues que graviten sobre l'arc superior estan situades al damunt del propi arc. Ja s'ha dit que l'arc és simètric amb referència a un eix vertical que passa per la clau. Però

aquesta simetria no existeix en les càrregues. La diferència de càrregues a banda i banda de l'eix és petita, però trenca la simetria de càrregues. Pel centre de gravetat de cadascuna de les dovelles es fa passar una línia de pas vertical i, per aquestes, un vector que representa la càrrega que li pertoca, en funció de les amplades de banda entre línies de pas. L'escala de forces que trasllada vectors GeoGebra a kN és la mateixa en les dues aplicacions, per això es pot comprovar que les càrregues en l'arc superior són significativament més petites que en l'arc inferior. No es contemplen altres sol·licitacions que no siguin les càrregues gravitatòries produïdes pel pes propi. El pes específic considerat per a la pedra ha estat de $\gamma = 27.45 \text{ kN/m}^3$. És un pes específic raonable, atès que la pedra utilitzada és la del massís de Garraf.

.3. Polígon funicular. Es grafia un polígon funicular que passi pels punts As, Bs i Cs. El punt As ha estat col·locat al voltant de la clau i els altres dos al voltant de les entregues. El mètode utilitzat ha estat el de les resultants parcials, que és el que produeix menys inestabilitats, però en tot cas es produeixen. El polígon funicular previ ha estat dibuixat en color blau i el definitiu, o línia de pressions, en color vermell.

.4. Forces. La línia de pressió ens donarà unes forces definides en el polígon de forces del polígon funicular. Aquestes no tenen per què ser perpendiculars a les cares de les dovelles. D'aquesta manera es descomponen cadascuna d'elles en una força normal i una altra tangencial. Aquesta última dividida per la secció efectiva ens donarà la tensió tangencial, amb un signe segons sigui el sentit del lliscament. La força normal tindrà una certa excentricitat que provocarà un moment flector i unes tensions que se sumaran amb el seu signe a les centrades.

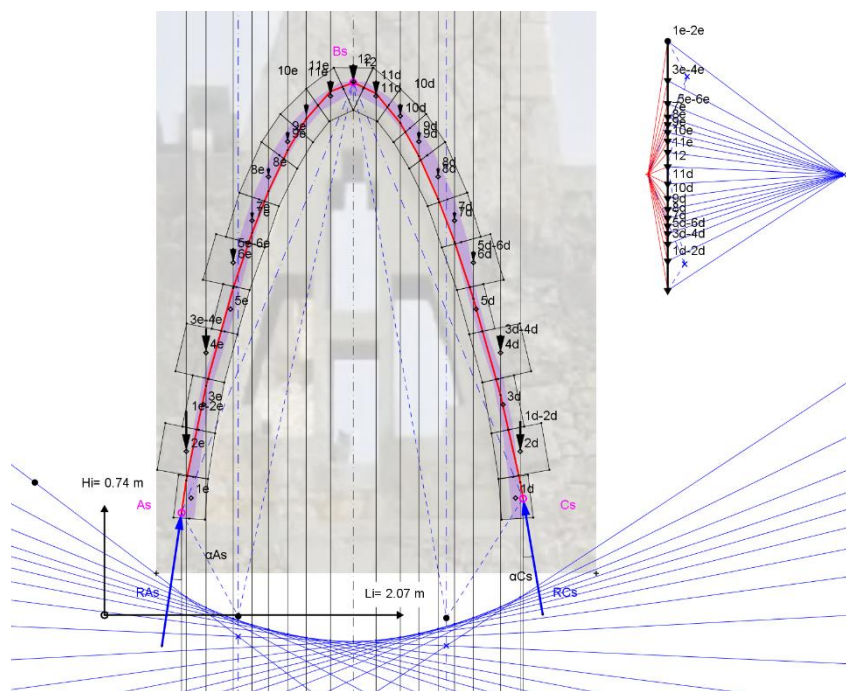


Fig. 5.75

.5. Nucli central. Si la cara comú entre dues dovelles consecutives està formada per dues dimensions diferents, la menor es diu dimensió efectiva de la dovella. Aquesta serveix per calcular el nucli central, les excentricitats, els moments d'inèrcia i les tensions. Per tant, el nucli central es dimensiona a partir dels terços de la dimensió efectiva de les dovelles.

.6. Moviment dels punts. El moviment dels punts As, Bs i Cs es fa amb la intenció que la línia de pressió passi per dins del nucli central. Qualsevol posició és lícita amb l'única condició que no es perdi el pas pels tres punts. En l'arc superior es té poc marge per al moviment dels punts, atès que la forma de l'arc i unes càrregues molt poc asimètriques, fa que les excentricitats siguin molt petites.

Arc inferior (fig. 5.77).

El procés de construcció de la línia de pressió de l'arc inferior és molt similar al de l'arc superior amb les següents matisacions.

.1. Les càrregues provenen de les que es troben al damunt del propi arc i de les que provoquen les càrregues que es troben entre els dos arcs inferiors. Les càrregues són molt més significatives que en l'arc superior. A més, les càrregues RAs i RCs són les reaccions de l'arc superior que graviten directament sobre l'arc inferior. Aquestes càrregues s'han d'arrossegar d'una aplicació a l'altre, cosa molt senzilla, atès que es defineixen les coordenades dels vectors de les reaccions. Qualsevol modificació (per exemple, un moviment dels punts As, Bs o Cs) a l'aplicació de l'arc superior, implicarà una modificació de les reaccions en l'arc inferior.

.2. La complexitat de les càrregues fa que el moviment dels punts Ai, Bi i Ci sigui molt més significatiu. En aquest cas, les propietats de GeoGebra són més evidents i es podran fer moviments encaminats a aproximar-se al nucli central, sense oblidar la inestabilitat del punt Bi.

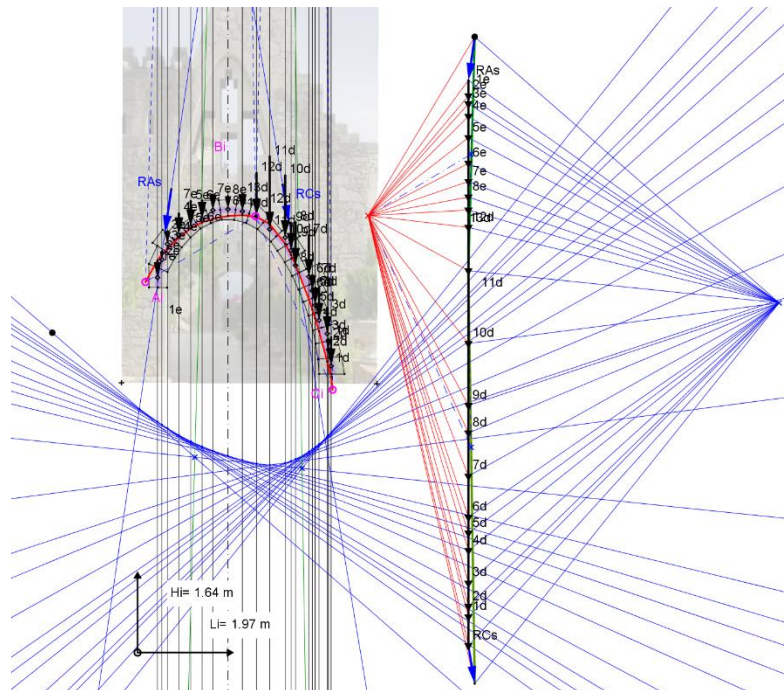


Fig. 5.77

Nucli central i excentricitats. El càlcul de les excentricitats provoca unes dificultats que és

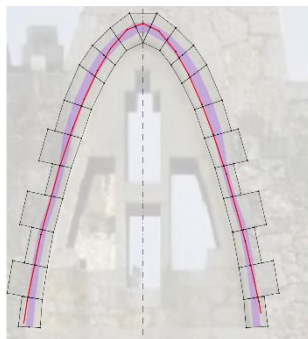


Fig. 5.78



Fig. 5.79

necessari aclarir. Les dovelles tenen discontinuïtats en l'extradós i, en conseqüència, el seu centre de gravetat és discontinu. Les càrregues estan aplicades precisament en el centre de gravetat de les dovelles, que sembla allò més correcte.

La línia de pressió dels arcs és el polígon de formes del polígon funicular, format per segments definits entre les línies d'acció de les forces. La intersecció d'aquestes amb les cares de les dovelles defineix les excentricitats. Quan el moviment dels punts està restringit (fig. 5.78), com

en el cas de l'arc superior, aquesta solució és acceptable però, cas contrari, es produeixen falses interseccions. En l'arc inferior (fig. 5.79) la solució adoptada en l'arc superior no és correcta. Les interseccions no s'han d'efectuar en els segments, sinó en les rectes del diagrama de formes. Això pot provocar certes irregularitats entre les excentricitats i el nucli central, però és inevitable quan els punts poden tenir moviments significatius.

Resultats. Els resultats són similars tant a l'arc superior (fig. 5.80) com a l'inferior (fig. 5.81). En fons groc es donen les qüestions comunes als dos arcs i les forces que actuen en el centre de gravetat de les dovelles. En fons blau es donen les excentricitats i les tensions normals a l'extradós i intradós, així com les tensions tangencials a cadascuna de les dovelles. Les tensions són baixes i per aquest motiu es donen en kp/cm^2 i en N/mm^2 .

Dades (1 Arc)	Excentricitats (cm)	Resultats (1 Arc)	Resultats (1 Arc)	Resultats (1 Arc)
Escala: 1 GeoGebra= 0.85 m Ample arc: bs= 0.3 m Pes específic material: $\gamma = 27.45 \text{ kN/m}^3$	(Cara superior dovella) 1e= 4.3 2e= 1.28 3e= 0.35 4e= 2.27 5e= 1.9 6e= 2.37 7e= 3.99 8e= 3.84 9e= 2.49 10e= 0.35 11e= 1.71 --- 12= 2.85 --- 1d-2d= 4.85 3d-4d= 2.79 5d-6d= 1.73 7d= 1.26 8d= 1.29 9d= 1.44 10d= 1.82 11d= 2.38	σn,e Tensions normals (Cara superior dovella) Extradós Nom... kp/cm^2 ... N/mm^2 1e...-7.39...-0.72 2e...-4.95...-0.48 3e...-2.5...-0.24 4e...-3.8...-0.37 5e...-3.6...-0.35 6e...-0.45...-0.04 7e...-0.16...-0.02 8e...-0.18...-0.02 9e...-0.36...-0.03 10e...-0.5...-0.05 11e...-0.58...-0.06 --- 1d...-6.18...-0.61 2d...-3.5...-0.34 3d...-1.35...-0.13 4d...-2.4...-0.23 5d...-1.84...-0.18 6d...0.73...0.07 7d...0.3...0.03 8d...0.15...0.01 9d...-0.14...-0.01 10d...-0.36...-0.03 11d...-0.54...-0.05	σn,i Tensions normals (Cara superior dovella) Intradós Nom... kp/cm^2 ... N/mm^2 1e...0.57...0.06 2e...-2.29...-0.22 3e...-2.08...-0.2 4e...-0.95...-0.09 5e...-0.85...-0.08 6e...-3.1...-0.3 7e...-1.94...-0.19 8e...-1.56...-0.15 9e...-1.01...-0.1 10e...-0.57...-0.06 11e...-0.27...-0.03 --- 1d...0.22...0.02 2d...-2.82...-0.28 3d...-2.89...-0.28 4d...-2...-0.2 5d...-2.54...-0.25 6d...-4.39...-0.43 7d...-2.49...-0.24 8d...-1.95...-0.19 9d...-1.28...-0.13 10d...-0.76...-0.07 11d...-0.33...-0.03	σt Tensions tangencials (kp/cm²) (Cara superior dovella) 1e= 0.24 2e= 0.25 3e= 0.11 4e= 0.12 5e= 0.24 6e= 0.18 7e= -0.18 8e= -0.18 9e= -0.12 10e= -0.13 11e= 0.02 --- 1d= 0.13 2d= 0.14 3d= 0.1 4d= 0.11 5d= 0.23 6d= 0.1 7d= 0.04 8d= -0.2 9d= -0.14 10d= -0.15 11d= 0
Reaccions (kN) RAs= 22.24 αAs= 8.38° RCs= 19.41 αCs= 9.61°				

Fig. 5.80

Dades (1 Arc)	Excentricitats (cm)	Resultats (1 Arc)	Resultats (1 Arc)	Resultats (1 Arc)
Escala: 1 GeoGebra= 0.85 m Ample arc: bs= 0.3 m LLum lliure entre arcs: b= 1.2 m Pes específic material: $\gamma = 27.45 \text{ kN/m}^3$	(Cara superior dovella) 1e= 11.1 2e= 2.28 3e= 1.63 4e= 0.43 5e= 2.56 6e= 4.64 7e= 13.25 --- 1d= 9.04 2d= 8.94 3d= 5.93 4d= 5.14 5d= 6.79 6d= 10.53 7d= 1.41 8d= 3.14 9d= 1.46 10d= 9.43 11d= 9.17 12d= 1.91 13d= 9.52	σn,e Tensions normals (Cara superior dovella) Extradós Nom... kp/cm^2 ... N/mm^2 1e...-16.46...-1.61 2e...-7.61...-0.75 3e...-4.55...-0.45 4e...-6.52...-0.64 5e...-3.56...-0.35 6e...-0.36...-0.04 7e...-3.71...0.36 --- 1d...0.78...0.08 2d...2.05...0.2 3d...-1.33...-0.13 4d...-2.37...-0.23 5d...-0.15...-0.01 6d...2.19...0.21 7d...-10.61...-1.04 8d...-18.52...-1.81 9d...-6.06...-0.59 10d...-21.7...-2.13 11d...-12.53...-1.23 12d...-2.93...-0.29 13d...1.27...0.12	σn,i Tensions normals (Cara superior dovella) Intradós Nom... kp/cm^2 ... N/mm^2 1e...3.47...0.34 2e...-4.1...-0.4 3e...-7.13...-0.7 4e...-7.56...-0.74 5e...-10.41...-1.02 6e...-12.77...-1.25 7e...-12.19...-1.19 --- 1d...-28.32...-2.78 2d...-31.49...-3.09 3d...-32.57...-3.19 4d...-30.85...-3.02 5d...-27.41...-2.69 6d...-23...-2.25 7d...-17.74...-1.74 8d...-5.33...-0.52 9d...-8.67...-0.85 10d...-5.57...0.55 11d...2.3...0.22 12d...-5.13...-0.5 13d...-9.34...-0.92	σt Tensions tangencials (kp/cm²) (Cara superior dovella) 1e= 1.52 2e= 0.68 3e= -0.08 4e= -0.6 5e= -0.2 6e= -0.66 7e= -0.74 --- 1d= 1.51 2d= 0.31 3d= -0.76 4d= -1.87 5d= -1.71 6d= -1.25 7d= -1.68 8d= -1.91 9d= -1.09 10d= -2.17 11d= -0.84 12d= -0.81 13d= 0.13

Fig. 5.81

Construcció. No es disposen de dades de quin va ser el procés constructiu dels arcs que ens ocupen. Un cop construït l'arc i, d'una manera general, hem de dir que les excentricitats poden variar segons sigui el procés de càrrega. Si aquest difereix molt de la càrrega final, allò aconsellable és conservar al cimbrat fins el final del procés cas contrari, es poden generar inestabilitats importants. En l'arc superior, amb càrregues gairebé simètriques, el procés de càrrega ha de ser també simètric.

Conclusions. Seguint l'ordre exposat en els objectius tindrem:

.1. La concordança entre la forma de l'arc superior i la seva línia de pressió és gairebé perfecta. En l'arc inferior i, atesa la complexitat de les càrregues i la seva excentricitat, la forma coincideix de manera acceptable amb la línia de pressió.

.2. Les tensions a les dovelles són baixes especialment a l'arc superior. Tenint en compte que el moviment dels punts pot provocar alguns canvis menors a les tensions, la tensió a compressió més alta produïda en el conjunt ha estat de 3.19 N/mm^2 , cosa totalment admissible per al tipus de pedra utilitzada a la fabricació de les dovelles. A tracció, la tensió màxima de 0.55 N/mm^2 no ha de provocar cap separació entre dovelles.

.3. La inestabilitat dels arcs únicament la poden produir el lliscament entre dovelles. La tensió tangencial màxima ha estat de 2.17 kp/cm^2 , que no és significativa.

Podem concloure que l'arc sobre arc del celler Güell respon a un bon dimensionament de les dovelles i a un bon comportament estructural.

.4. La utilització de dos programes GeoGebra per resoldre una única qüestió estructural no ha comportat cap problema. L'única precaució ha estat traslladar les reaccions de l'arc superior a càrregues en l'inferior. Els dos programes funcionen amb recursos suficients perquè els moviments dels punts es produeixin amb total efectivitat.