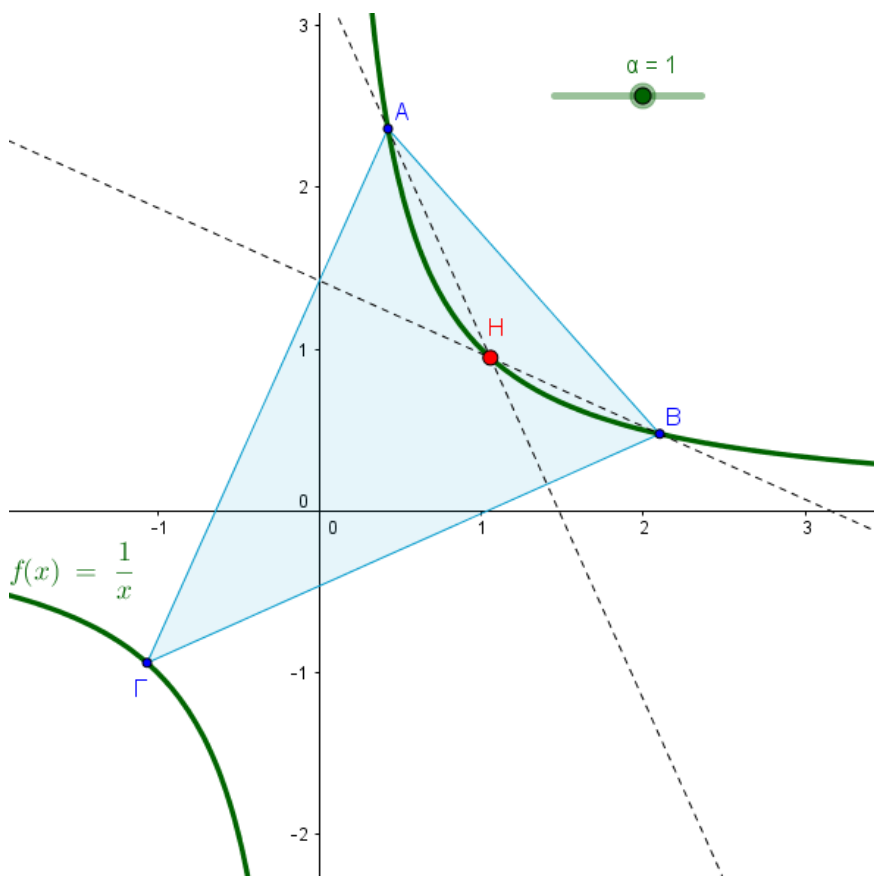


Εισαγωγή:

Για πολλούς χρήστες – μέχρι πρόσφατα και σε εμένα-, η ύπαρξη και λειτουργία του **CAS** (Computer Algebra System) στο **Geogebra**, αποτελούσε ένα ακόμη ‘καλούδι’, του οποίου η χρησιμότητα ήταν αμφισβητούμενη. Συνήθως χρησιμοποιείται για επίλυση κάποιων δευτεροβάθμιων εξισώσεων με άρρητες ρίζες, ή κάποιων πολυωνυμικών εξισώσεων. Δεν θα πέραγα από το μυαλό μου, ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για απόδειξη!

Εντελώς συμπτωματικά, διαπίστωσα την ισχύ αυτού του εργαλείου, όταν χρειάστηκε να κάνω πολλές και αδιέξοδες πράξεις προκειμένου να αποδείξω την παρακάτω πρόταση.

“Αν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τις κορυφές του σε ισοσκελή υπερβολή, τότε και το ορθόκεντρο H του τριγώνου ανήκει στην υπερβολή”.



Είπα λοιπόν δοκιμαστικά, να συντάξω στο CAS –εντελώς φορμαλιστικά και χωρίς κάποιον ειδικό κώδικα- τις σχέσεις που συνοδεύουν την υπόθεση και να ζητήσω τον υπολογισμό του ζητούμενου αποτελέσματος. Ο χρόνος για όλη τη διαδικασία: 4’ για τη σύνταξη των σχέσεων. Και το αποτέλεσμα άμεσο. Παρακάτω δίνω τη σύνταξη των σχέσεων του προβλήματος, και στο τέλος την τελική απόδειξη.

Εισαγωγή των σημείων και των σχέσεων του προβλήματος

CAS	
1	A=(a_1,a_2) → A = (a₁, a₂)
2	B=(b_1,b_2) → B = (b₁, b₂)
3	C=(c_1,c_2) → C = (c₁, c₂)
4	H=(p,q) → H = (p, q)
5	a_1 a_2=a → a₁ a₂ = a
6	b_1 b_2=a → b₁ b₂ = a
7	c_1 c_2=a → c₁ c₂ = a


Ορισμός των σημείων A, B, C και H με γενικευμένη μορφή συντεταγμένων.

Τα σημεία A, B, C ανήκουν στην υπερβολή $y=a/x$

Ορίζουμε μόνο τη σχέση . Η σχέση με τα bold γράμματα είναι η έξοδος που δίνει το CAS

8	(p-a_1,q-a_2)(b_1-c_1,b_2-c_2)=0 → (b₁ - c₁) (-a₁ + p) + (b₂ - c₂) (-a₂ + q) = 0
9	(p-b_1,q-b_2)(c_1-a_1,c_2-a_2)=0 → (-a₁ + c₁) (-b₁ + p) + (-a₂ + c₂) (-b₂ + q) = 0
10	pq-a ○ Λύση: {a = pq}

Οι σχέσεις καθετότητας των διανυσμάτων HA και HB με τα διανύσματα BC και AC αντίστοιχα.

Αρκεί να αποδειχθεί ότι: $pq-a=0$.
Γράφουμε $pq-a$ και επιλέγουμε 

ο.ε.δ!