Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 4 - derivada y crecimiento de la función

1. Calcula el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos (abscisas) de $f(x)=x^3-x$ **.**

Obtenemos los puntos críticos, anulando la primera derivada.

$$f'(x)=3x^2-1 \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

La función original es continua en toda la recta real, por ser polinómica, por lo que estudiamos el crecimiento de la función en los siguientes intervalos.

$(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}) \quad \rightarrow \quad f'(-100)>0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente creciente

$(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}) \quad \rightarrow \quad f'(0)<0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente decreciente

$(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty) \quad \rightarrow \quad f'(100)>0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente creciente

Por lo tanto, en $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ tenemos un máximo y en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ tenemos un mínimo relativo. El enunciado solo nos pide obtener las abscisas de los extremos relativos, por lo que no calculamos las imágenes de los extremos.

2. Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$

El dominio de la función son todos los reales, ya que el denominador nunca se anula para los reales.

$$f'(x)=\frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2}$$

$(-\infty,\frac{-1}{2}) \quad \rightarrow \quad f'(-10)>0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente creciente

$(\frac{-1}{2},+\infty) \quad \rightarrow \quad f'(0)<0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente decreciente

3. Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1-\frac{1}{x}$ **.**

$f(x)=1-\frac{1}{x} \rightarrow \quad Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\frac{1}{x^2}$, $f'(x)=0 \rightarrow \quad 1=0$ → Absurdo matemático → No hay puntos críticos

$(-\infty,0) \rightarrow \quad f'(-1)>0 \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente creciente

$(0,+\infty) \rightarrow \quad f'(1)>0 \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente creciente

La función es estrictamente creciente en todo su dominio.

4. Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de $f(x)=\ln(1-x^2)$

$f(x)=\ln(1-x^2)$ → Para que el argumento del logaritmo sea positivo necesitamos que el argumento sea estrictamente mayor que cero:

$1-x^2>0 \rightarrow Dom(f)=(-1,1)$

Calculamos la primera derivada para estudiar la monotonía.

$$f(x)=\ln(1-x^2) \rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=0$$

$(-1,0) \rightarrow f'(\frac{-1}{2})>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

$(0,1) \rightarrow f'(\frac{1}{2})<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

5. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ usamos la primera derivada derivada. Calculemos sus raíces → $f'(x)=0$.

$$(x-4)^2=0 \quad \rightarrow x=4$$

$$x^2-8x+7=0 \quad \rightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}\rightarrow x=1, x=7$$

Evaluamos la derivada para estimar los crecimientos. Como la derivada es un polinomios es lógico asumir que la función original también será un polinomio, por lo que su dominio será toda la recta real.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4,7)$	$(7,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)>0$	$f'(2)<0$	$f'(5)<0$	$f'(10)>0$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)\cup(7,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1,7)$.