

INTEGRALES INDEFINIDAS

Índice:

1. Primitiva de una función-----	2
2. Interpretación geométrica. Propiedades de la integral indefinida-----	4
3. Integrales inmediatas-----	6
4. Integración por sustitución o cambio de variable-----	12
5. Integración por partes-----	13
6. Integración de funciones racionales-----	14
7. Integración de funciones trigonométricas e irracionales-----	16
8. Otras integrales-----	18

1. Primitiva de una función

Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo intervalo $I=[a, b]$. Diremos que la función $F(x)$ **es una función primitiva de** $f(x)$, o simplemente **primitiva** de $f(x)$ en el intervalo I , si la derivada de $F(x)$ coincide con la función $f(x)$ en el intervalo I , es decir:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x)=f(x); \forall x \in I$$

Ejemplos

- $F(x)=x$ es una función primitiva de $f(x)=1$, ya que $F'(x)=1=f(x)$.
- $\ln x$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$, ya que $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Si existe la función primitiva $F(x)$ de $f(x)$, decimos que $f(x)$ es **integrable**.

El proceso que nos permite obtener $F(x)$ a partir de $f(x)$ se denomina **integración** (podemos considerar la integración como la función inversa de la derivación).

Hay que observar que si una función $f(x)$ tiene una función primitiva no es única. Por ejemplo: $F_1(x)=x^2$, $F_2(x)=x^2+1$, $F_3(x)=x^2+2$, ..., son primitivas de $f(x)=2x$.

Teorema.- Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos funciones primitivas de una función $f(x)$, entonces se diferencian en una constante.

Ya que si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, se cumplirá $F'(x)=G'(x)=f(x)$. Luego, se cumplirá:

$$(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=0$$

Por tanto, existirá una constante C , tal que:

$$(F-G)(x)=F(x)-G(x)=C$$

Por tanto, se verifica:

$$F(x)=G(x)+C$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C es un número real cualquiera, la función $(F(x)+C)$ es también una primitiva de $f(x)$. El **conjunto de funciones primitivas** de $f(x)$ será

$$\{F(x)+C : C \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, F'(x)=f(x)\}$$

Cuando utilizamos la notación diferencial, teniendo en cuenta que $F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}$:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow dF(x)=f(x) \cdot dx$$

Al conjunto, de todas las funciones primitivas de $f(x)$, se le denomina **INTEGRAL INDEFINIDA**¹ de $f(x)$ y se representa por (*integral de $f(x)$ diferencial de x*):

$$\int f(x) dx = F(x) + C; C \in \mathbb{R}$$

Al número C , se le denomina **constante de integración**.

Hay que tener en cuenta que la integral indefinida de $f(x)$ es el conjunto de todas las funciones primitivas de $f(x)$.

Ejemplos.-

- Si $f(x)=3$, entonces, $\int 3 dx = 3x + C; C \in \mathbb{R}$
- Si $f(x)=9x^2$, entonces, $\int 9x^2 dx = 3x^3 + C; C \in \mathbb{R}$
- Dado que determinar primitivas de funciones es efectuar la operación inversa de la derivación, es inmediato comprobar algunos ejemplos como:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

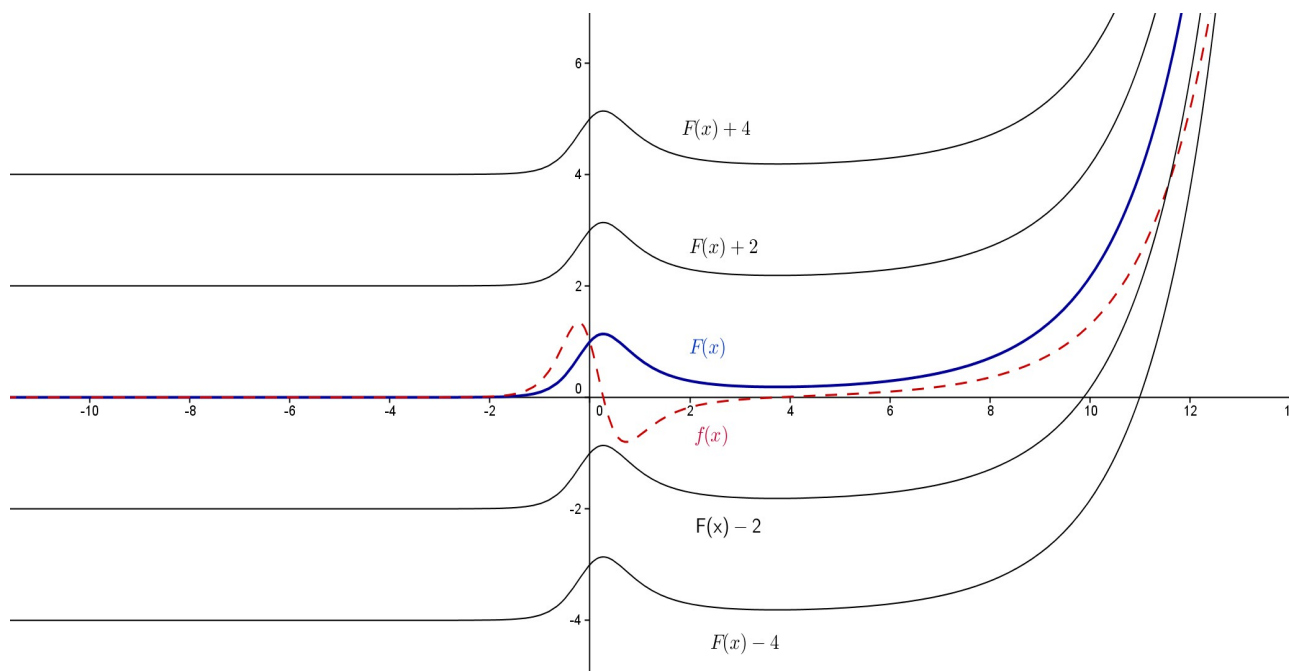
$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

¹ No hay que confundir los símbolos, $\int f$ con $\int_a^b f$. El primero, designa el conjunto de todas las primitivas de f , mientras que el segundo (integral definida de f en el intervalo $[a,b]$), es un número real.

2. Interpretación geométrica. Propiedades de la integral indefinida

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la integral indefinida $\int f(x) dx = F(x) + C$, serán infinitas traslaciones verticales de la función $F(x)$.



Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ en un intervalo I , existe una única primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto (a, b) .

Ejemplos.-

- Hallar una primitiva $F(x)$ de $f(x)=2x$ cuya gráfica pase por el punto $P(1,3)$. Las primitivas de $f(x)$ son de la forma $F(x)=x^2+C$. Puesto que la primitiva pedida para por el punto $P(1,3)$, resulta:

$$f(1)=3 \Rightarrow 3=1+C \Rightarrow C=2$$

Luego, la primitiva es

$$F(x)=x^2+2$$

¿Y si pasa por el origen?.

Si pasara por el origen C sería 0, y la primitiva sería $F(x)=x^2$

- Halla una recta (función lineal $f(x)$) cuya pendiente es 2 y pasa por el punto $P(0,4)$. La derivada de la función lineal es su pendiente, por tanto, $f'(x)=2$, luego

$$f(x)=2x+C$$

Por pasar por el punto $P(0,4)$, resulta que

$$4=C \Rightarrow f(x)=2x+4$$

Si $f(x)$ es una función derivable, se cumplen las siguientes propiedades

1. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$

2. $\int f'(x) dx = f(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

1.- $\left(\int 3 \cdot x^2 dx\right)' = (x^3 + C)' = 3 \cdot x^2$

2.- $\int (3 \cdot x^2)' \cdot dx = \int 6 \cdot x \cdot dx = 3 \cdot x^2 + C \quad C \in \mathbb{R}$

Propiedad lineal de la integración

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y f, g son funciones continuas definidas en un intervalo I, se cumple

$$\int (a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)) \cdot dx = a \cdot \int f(x) \cdot dx \pm b \cdot \int g(x) \cdot dx$$

Ejemplos:

1.- $\int 5 \cdot x^2 dx = 5 \int x^2 dx = 5 \cdot \left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{5 \cdot x^3}{3} + 5 \cdot C = \frac{5 \cdot x^3}{3} + K \quad K \in \mathbb{R}$

2.- $4 \cdot \int x^3 dx = \int 4 \cdot x^3 dx = x^4 + C \quad C \in \mathbb{R}$

3.- $\int (2x + \cos x) dx = \int 2x dx + \int \cos x dx = x^2 + C_1 + \sin x + C_2 = x^2 + \sin x + C \quad C \in \mathbb{R}$

4.- $\int \left(\frac{5}{x} + 4e^x\right) dx = 5 \int \frac{1}{x} dx + 4 \int e^x dx = 5 \ln x + C_1 + 4e^x + C_2 = 5 \ln x + 4e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$

5.- $\int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = x + \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$

6.- $\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2} dx = \int \left(2x + 1 - \frac{1}{x}\right) dx = x^2 + x - \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$

3. Integrales inmediatas

Si tenemos en cuenta la tabla de derivadas estudiadas en el tema de funciones derivadas, y aplicamos de forma inversa estas derivadas, obtenemos la siguiente tabla:

Forma sencilla	Forma compuesta
$\int dx = x + C$	$\int k dx = k x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$	$\int f'(x) \cdot f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \cdot \sin f(x) dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + C$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{Arcsen} x + C = -\arccos x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \operatorname{Arcsen} f(x) + C = -\arccos f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{Arctg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \operatorname{Arctg} f(x) + C$

Ejemplos:

$$1.- \int \frac{5}{x^2} dx = 5 \int x^{-2} dx = -5 \cdot x^{-1} + C = -\frac{5}{x} + C \quad K \in \mathbb{R}$$

$$2.- \int (5^x + 1) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Tipos fundamentales de integración

Tipo potencial ($a \neq -1$). Las funciones son de la forma $f(x) = x^a$ o $f(x) = k \cdot x^a$.

Si $a = -1$, la integral de la función $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ no sigue la fórmula que vamos a ver.

Casos particulares

★ Si $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \int 0 \, dx = C \quad C \in \mathbb{R}$

★ Si $f(x) = k, k \neq 0 \Rightarrow \int f(x) \, dx = kx + C \quad C \in \mathbb{R}$

Forma simple: $y = x^a$ ($a \neq -1$)

★ Si $f(x) = x^a; (a \neq -1) \Rightarrow F(x) = \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y = f^a(x) \cdot f'(x)$ ($a \neq -1$)

★ Si $y(x) = f^a(x) \cdot f'(x); (a \neq -1)$
 $\Rightarrow F(x) = \int y(x) \, dx = \int f^a(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + C \quad C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$\int x^4 \, dx = \frac{1}{5} x^5 + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^4} \, dx = \int x^{-4} \, dx = \frac{x^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{x^{-3}}{3} + C = \frac{1}{3x^3} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt[3]{x^2} \, dx = \int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int (x+1)^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^3 + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x+1) \cdot (x^2+x+1)^{30} \, dx = \frac{1}{31} \cdot (x^2+x+1)^{31} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{4} \cdot \sin^4 x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x) \, dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}^3 x + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int (\operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x) \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cdot \cos^3 x + C ; C \in \mathbb{R}$$

Tipo logarítmico

Forma simple: $y = \frac{1}{x}$

★ Si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C ; C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$

★ Si $y(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow F(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C ; C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$\int \frac{3}{x} \, dx = 3 \int \frac{1}{x} \, dx = 3 \ln|x| + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 5} \, dx = \ln|x^3 + x + 5| + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2 + 1| + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 8} \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2}{x^3 + 8} \, dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3 + 8| + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, dx = \ln|1 + \operatorname{sen}^2 x| + C ; C \in \mathbb{R}$$

Tipo exponencial

Forma simple: $y = e^x ; y = a^x$

★ Si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C ; C \in \mathbb{R}$

★ Si $f(x)=a^x \Rightarrow F(x)=\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C ; C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x)=e^{f(x)} \cdot f'(x) ; y(x)=a^{f(x)} \cdot f'(x)$

★ Si $y(x)=e^{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow F(x)=\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C ; C \in \mathbb{R}$

★ Si $y(x)=a^{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow F(x)=\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C ; C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int e^{2x+1} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{3^x}{2^x} dx = \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = e^{\sin x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{\sin^2 x} \cdot (\sin 2x) dx = \int e^{\sin^2 x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x dx = e^{\sin^2 x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

Tipo seno

Forma simple: $y = \cos x$

★ Si $f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\int \cos x dx = \sin x + C ; C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x)=\cos f(x) \cdot f'(x)$

★ Si $y(x)=\cos f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow F(x)=\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \sin f(x) + C ; C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cdot \cos(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2+1) + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x+1) \cdot \cos(x^2+x+1) dx = \text{sen}(x^2+x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \text{sen}(\ln x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x \cdot \cos(e^x) dx = \text{sen}(e^x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x^3+9) dx = \text{sen}(x^3+9) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \cdot \cos(x^3+1) dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot x^2 \cdot \cos(x^3+1) dx = \frac{1}{3} \text{sen}(x^3+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

Tipo coseno

Forma simple: $y = \text{sen } x$

★ Si $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow F(x) = \int \text{sen } x dx = -\cos x + C; C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x) = \text{sen } f(x) \cdot f'(x)$

★ Si $y(x) = \text{sen } f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow F(x) = \int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + C; C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$\int \text{sen}(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \text{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \text{sen}(2x+6) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \text{sen}(2x+6) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+6) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cdot \text{sen}(x^2+3) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \text{sen}(x^2+3) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2+3) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x+1) \cdot \text{sen}(x^2+x+1) dx = -\cos(x^2+x+1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx = \int \text{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = -\cos(\ln x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x \cdot \text{sen}(e^x) dx = -\cos(e^x) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \text{sen } 5x dx = \frac{1}{5} \int 5 \text{sen } 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5} + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \text{sen}(7x+8) dx = \frac{1}{7} \int 7 \cdot \text{sen}(7x+8) dx = -\frac{1}{7} \cos(7x+8) + C; C \in \mathbb{R}$$

Tipo tangente

Forma simple: $y = \sec^2 x$

★ Si $f(x) = \sec^2 x \Rightarrow F(x) = \int \sec^2 x dx = \text{tg } x + C; C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x) = \sec^2 f(x) \cdot f'(x)$

★ Si $y(x) = \sec^2 f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow F(x) = \int \sec^2 f(x) \cdot f'(x) dx = \operatorname{tg} f(x) + C; C \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$\int 3 \sec^2 x dx = 3 \int \sec^2 x dx = 3 \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{7}{\cos^2 x} x dx = 7 \int \sec^2 x dx = 7 \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int (5 + 5 \operatorname{tg}^2 x) dx = 5 \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = 5 \operatorname{tg} x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int 3 x^2 \cdot \sec^2(x^3 + 9) dx = \operatorname{tg}(x^3 + 9) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^2(2x + 1) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sec^2(2x + 1) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + 1) + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^4 x dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx = \int (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x) dx = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C; C \in \mathbb{R}$$

4. Integración por sustitución o cambio de variable

Este método es consecuencia de la derivación de funciones compuestas. Se trata de sustituir en la función $f(x)$ la variable x por otra función de variable t , $x=x(t)$ (*derivable e invertible, y con derivada no nula*) tal que $f(x)=f(x(t))$, y podamos integrar más fácilmente $f(x)$, mediante los siguientes pasos

a) Sustitución de la variable x por t

Forma directa: Si $f(x)=f(x(t)) \Rightarrow \int f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt$

Forma recíproca: Si $f(t)=f(t(x)) \Rightarrow \int f(t) dt = \int f(t(x)) t'(x) dx$

b) Integración de la nueva función en t

Si la nueva función obtenida de variable t (o x en forma recíproca) es más sencilla, se integra. En caso contrario, hay que elegir otra sustitución más adecuada.

c) Sustitución de la variable t por x

Una vez calculada la integral en t (o x en forma recíproca) se deshace el cambio.

Es decir:

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) \cdot dt = F(t) + C = F(x^{-1}(t)) + C$$

Ejemplos:

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=t^2 \\ dx=2t dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{\cos t}{t} 2t dt = 2 \cdot \int \cos t dt = 2 \sin t + C = 2 \sin \sqrt{x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int 2x \cdot (x^2+5)^{25} dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=x^2+5 \\ dt=2x dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int t^{25} dt = \frac{1}{26} (x^2+5)^{26} + C ; C \in \mathbb{R}$$

5. Integración por partes

La integral de un producto, método de integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables ó u y v funciones diferenciables, haciendo $f(x)=u$ y $g(x)=v$, mediante el siguiente proceso, resumido:

	Forma con derivadas	Forma con diferenciales
Derivando o Diferenciando	$(f g)' = f g' + g f'$	$d(uv) = u dv + v du$
Integrando	$f g = \int f g' + \int g f'$	$u v = \int u dv + \int v du$
Despejando	$\int f g' = f g - \int g f'$	$\int u dv = u v - \int v du$

Ejemplos:

$$\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C; C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x+1) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \cdot \ln(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx = \\ &= x \cdot \ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x \cdot \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = \\ &= -x^2 \cos x + \left\{ \begin{array}{l} u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &= e^x \sin x + \left\{ \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = (-\cos x) \end{array} \right\} = e^x \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

que reagrupando términos, obtenemos

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} \cdot (e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x) + C; C \in \mathbb{R}$$

6. Integración de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales, si $\text{grado } P(x) \geq \text{grado } Q(x)$, existirá dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$, con $\text{grado } C(x) < \text{grado } P(x)$ y $\text{grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$ tal que:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Y se cumplirá

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

$\int C(x) dx$ se puede integrar por los métodos estudiados anteriormente.

Para integrar $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$, si $Q(x)$ tiene p raíces reales (x_1 de multiplicidad $m(1)$, ..., x_p de multiplicidad $m(p)$) y q raíces imaginarias ($a_{p+1} - i b_{p+1}$ de multiplicidad $n(p+1)$, ..., $a_{p+q} - i b_{p+q}$ de multiplicidad $n(p+q)$). Es decir:

$$Q(x) = a \cdot \prod_{r=1}^p (x - x_r)^{m_r} \cdot \prod_{s=p+1}^{p+q} ((x - a_s) + b_s^2)^{n_s}, \text{ donde } \text{grado}(Q(x)) = \sum_{r=1}^p m_r + 2 \cdot \sum_{s=p+1}^q n_s$$

Luego, existirán las constantes reales

$$A_{r1}, A_{r2}, \dots, A_{rm(r)}, B_{s1}, B_{s2}, \dots, B_{sn(s)}, C_{s1}, C_{s2}, \dots, C_{sn(s)}; \text{ tales que } r=1, 2, \dots, p; s=p+1, p+2, \dots, p+q$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{r=1}^p \left[\frac{A_{r1}}{x - x_r} + \dots + \frac{A_{rm(r)}}{(x - x_r)^{m(r)}} \right] + \sum_{s=p+1}^q \left[\frac{B_{s1} + C_{s1} \cdot x}{(x - a_s) + b_s^2} + \dots + \frac{B_{sn(s)} + C_{sn(s)} \cdot x}{[(x - a_s) + b_s^2]^{n(s)}} \right]$$

Y todos los términos de la descomposición se integran fácilmente, teniendo en cuenta:

$$\int \frac{A_{rm(r)}}{(x - x_r)^{m(r)}} dx = \begin{cases} A_{rm(r)} \cdot \ln|x - x_r| + K & \text{Si } m(r) = 1 \\ \frac{(-A_{rm(r)})}{(m(r) - 1) \cdot (x - x_r)^{m(r)-1}} + K & \text{Si } m(r) > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{B_{sn(s)} + C_{sm(s)} \cdot x}{((x - a_s)^2 + b_s^2)^{n(s)}} dx = \begin{cases} \frac{1}{b_s^2} \cdot (B_{sn(s)} + C_{sm(s)} \cdot a_s) \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x - a_s}{b_s}\right)^2 + 1} + \frac{C_{sm(s)}}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot (x - a_s)}{(x - a_s)^2 + b_s^2} = & \text{Si } n(s) = 1 \\ \frac{1}{b_s^2} \cdot (B_{sn(s)} + C_{sm(s)} \cdot a_s) \cdot \text{Arctg}\left(\frac{x - a_s}{b_s}\right) + \frac{C_{sm(s)}}{2} \cdot \ln|(x - a_s)^2 + b_s^2| + K & \text{Si } n(s) > 1 \end{cases}$$

Se resuelve por partes hasta obtener la integral anterior

Ejemplos:

- $$\int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int \frac{1/2}{x-1} dx - \int \frac{(1/2) \cdot (x+1)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int \frac{1/2}{x-1} dx - \int \frac{(1/2) \cdot x}{x^2+1} dx - \int \frac{(1/2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{4} \cdot \ln|x^2+1| - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Arctg} x + K$$
- $$\int \frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx =$$

$$= 3 \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 \cdot \ln|x+2| + K$$
- $$\int \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-1} dx = 2 \ln|x-2| + 3 \cdot \ln|x-1| + K$$
- $$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = -\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2 \cdot (x-1)^2} + K$$
- $$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{5}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + K$$
- $$\int \frac{1}{2x^2+x+2} dx = \int \frac{1}{2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2 \right)} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2} \cdot \left(\left(\frac{x + \frac{1}{4}}{\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)} \right)^2 + 1 \right) \right)} dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{15}}}{\left(\left(\frac{x + \frac{1}{4}}{\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)} \right)^2 + 1 \right)} dx = \frac{1}{\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \operatorname{Arctg} \left(\frac{x + \frac{1}{4}}{\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)} \right) + K =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{15} \cdot \operatorname{Arctg} \left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}} \right) + K$$
- $$\int \frac{x+5}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4x+20}{2x^2+x+2} dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4x+1}{2x^2+x+2} dx + \frac{19}{4} \cdot \int \frac{1}{2x^2+x+2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|2x^2+x+2| + \frac{19 \cdot \sqrt{15}}{30} \cdot \operatorname{Arctg} \left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}} \right) + K$$

7. Integración de funciones trigonométricas e irracionales

Si denominamos $R(f(x), g(x))$ a una función racional que contiene a las funciones

$$f(x) \text{ y } g(x), \text{ por ejemplo: } R(x^2, \operatorname{sen} x) = \frac{(\operatorname{sen} x + 1)^3}{2 + x^2}.$$

En el caso particular de las funciones trigonométricas, cuando tengamos que integrar una función de la forma

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$$

Utilizaremos el cambio de variable

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \operatorname{Arctg} t \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{2 \cdot dt}{1 + t^2}$$

$$\text{Además, de las fórmula trigonométrica} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \begin{cases} = 2 \cos^2 x - 1 \\ = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \end{cases},$$

obtenemos:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Que dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = t^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x) = t^2 + t^2 \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, se obtiene:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2} = \frac{2 \cdot t}{1 + t^2}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) = t \right\} \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \cdot dt = \int dt = t + C = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

En el caso particular de que $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = H(\operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x)$, con m y n números enteros, para integrar, podemos utilizar el siguiente cambio de variable:

m	n	CAMBIO	Sen x	Cos x	dx
IMPAR		$\cos x = t$	$\sqrt{1-t^2}$	t	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
	IMPAR	$\operatorname{sen} x = t$	t	$\sqrt{1-t^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
PAR	PAR	$\operatorname{tg} x = t$	$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\frac{1}{1+t^2}$

Ejemplos:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x dx = \int (\sqrt{1-t^2})^3 \cdot t^4 \cdot -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int (1-t^2) \cdot t^4 dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \cdot \cos^5 x dx &= \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int (t^4 - 2 \cdot t^6 + t^8) dt = \frac{1}{5} \cdot t^5 - \frac{2}{7} \cdot t^7 + \frac{1}{9} \cdot t^9 + C = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{sen}^9 x}{9} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^3 x \cdot dx &= \int t^5 \cdot (\sqrt{1-t^2})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt = \int (t^5 - t^7) \cdot dt = \frac{1}{5} \cdot t^5 - \frac{1}{8} \cdot t^8 + C = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^8 x}{8} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\cos^2 x} \cdot dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot dt = \int \frac{1}{2+t^2} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

8. Otras integrales

Para resolver la integral

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right) \cdot dx$$

efectuamos el cambio de variable

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^{m.c.m.(n, p, \dots, s)}$$

Que en el caso particular de $a=d=1$ y $b=c=0$, obtenemos la integral

$$\int R(x, x^{m/n}, x^{p/q}, \dots, x^{r/s}) \cdot dx$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 4 \cdot t^3 \cdot dt = 4 \cdot \int \frac{t^4}{1+t^2} \cdot dt = 4 \cdot \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot dt = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{Arctg} t\right) + C = 4 \cdot \left(\frac{x^{3/4}}{3} - x^{1/4} + \operatorname{Arctg} x^{1/4}\right) + C \end{aligned}$$