

Resumen y Ejercicios Ecuaciones cuadráticas (2)

I. Una **ecuación cuadrática** con coeficientes reales es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

siendo a, b, c números reales.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 - 4x = 0; \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad x^2 + 5x + 6 = 0; \quad 5x^2 - 20 = 0; \quad x^2 + 1 = 0$$

II. **Raíz o solución** de una ecuación cuadrática.

Un número r es una **raíz** o una **solución** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, si y solo si, al sustituir x por r , se cumple la igualdad. Es decir: $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

Ejemplo. Determinar el valor de m en la ecuación: $6x^2 - mx + 15 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es: 3.

Solución. Sustituyendo $x=3$ en la ecuación, se obtiene: $6 \cdot 3^2 - m \cdot 3 + 15 = 0$, de donde $m = 23$.

III. **Resolver** una ecuación cuadrática significa, hallar todas las raíces (o soluciones) de la ecuación cuadrática.

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas. Los más usuales son:

- a) Factorización
- b) Completando el cuadrado de un binomio
- c) Fórmula cuadrática.

a) **Método de Factorización**

Este método se usa preferentemente cuando la expresión $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar o descomponer en un producto de dos binomios lineales de manera rápida.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Resolver la ecuación $x^2 + 2x - 63 = 0$	Resolver la ecuación $x^2 + 7x = 0$
$x^2 + 2x - 63 = 0$	$x^2 + 7x = 0$
$(x + 9)(x - 7) = 0$	$x(x + 7) = 0$
$x + 9 = 0, \text{ o, } x - 7 = 0$	$x = 0, \text{ o, } x + 7 = 0$
$x_1 = -9; \quad x_2 = 7$	$x_1 = 0; \quad x_2 = -7$

Ejercicios (1)

Usando este procedimiento resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 + 15x + 56 = 0$

2) $x^2 + 3x - 88 = 0$

3) $x^2 - 4x - 45 = 0$

4) $x^2 - 37x = 0$

5) $5x^2 + 12x = 0$

6) $x^2 - 81 = 0$

7) $x^2 - 23x + 120 = 0$

8) $x^2 + x - 72 = 0$

9) $6x^2 - 19x + 10 = 0$

b) Método Completación de un binomio al cuadrado.

Este método permite resolver cualquier ecuación cuadrática. Se aplica la siguiente propiedad: si $A^2 = B$ entonces $A = \pm\sqrt{B}$.

<p>Ejemplo 1 Resolver la ecuación $x^2 + 2x - 63 = 0$</p> $x^2 + 2x - 63 = 0$ $x^2 + 2x = 63$ $x^2 + 2x + 1 = 63 + 1$ $(x + 1)^2 = 64$ $x + 1 = \pm\sqrt{64}$ $x = -1 \pm \sqrt{64}$ $x = -1 + 8, \quad o, \quad x = -1 - 8$ $x = 7, \quad o, \quad x = -9$	<p>Ejemplo 2 Resolver la ecuación $3x^2 - 12x + 5 = 0$</p> $3(x^2 - 4x) + 5 = 0$ $3(x^2 - 4x + 4) - 12 = -5$ $3(x - 2)^2 = 7$ $(x - 2)^2 = \frac{7}{3}$ $x - 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ $x = 2 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$
---	--

Ejercicios (2)

Usando el método de completación de cuadrado resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 + 15x + 56 = 0$

2) $x^2 + 3x - 88 = 0$

3) $6x^2 - 19x + 10 = 0$

Nota. El **método de completación de cuadrado** aplicado a la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, proporciona una **fórmula** con la cual se puede resolver de manera directa cualquier ecuación cuadrática.

c) Método de fórmula.

Resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, siendo $a \neq 0$ (expresada en la forma canónica).

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (escrita en la **forma canónica**) se pueden obtener usando la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejercicios (3)

Usando este procedimiento resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 + 15x + 56 = 0$ | 2) $x^2 + 3x - 88 = 0$ | 3) $x^2 - 4x - 45 = 0$ |
| 4) $x^2 - 37x = 0$ | 5) $5x^2 + 12x = 0$ | 6) $x^2 - 81 = 0$ |
| 7) $x^2 - 23x + 120 = 0$ | 8) $x^2 + x - 72 = 0$ | 9) $6x^2 - 19x + 10 = 0$ |
| 10) $6x^2 + 7x - 3 = 0$ | 11) $39x^2 - 83x = 56$ | 12) $7x^2 - 13x - 1 = 0$ |
| 13) $(x+7)(x+3) = 21$ | 14) $(5x-3)(2x+1) = 46-x$ | 15) $5x(x-6) = x-30$ |
| 16) $ax^2 + bx - c = 0$ | 17) $6m^2 + bmx = 2b^2x^2$ | 18) $(2x+c)^2 = 2x-c$ |

IV. **Otras ecuaciones** (que **no** son ecuaciones cuadráticas) se pueden resolver aplicando métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas. Recuerde que, para estas ecuaciones, debe verificar si las soluciones obtenidas son o no son soluciones de la ecuación dada.

Ejercicios (4). Resuelva cada ecuación:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ | 2) $\frac{x-3}{2x-2} = -x$ | 3) $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$ |
| 4) $\frac{x}{2} = \frac{2}{3} + \frac{7}{6x}$ | 5) $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{x-5}{x-1} = 2$ | 6) $\frac{7}{x-3} - \frac{10}{x-2} - \frac{6}{x-1} = 0$ |

V. Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Sus raíces se pueden obtener usando la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La naturaleza de las raíces de la ecuación dependen de la cantidad subradical $b^2 - 4ac$ llamada **discriminante**.

	Naturaleza de las raíces
$b^2 - 4ac > 0$	las dos raíces son reales y distintas
$b^2 - 4ac = 0$	las raíces de la ecuación son reales e iguales
$b^2 - 4ac < 0$	las raíces de la ecuación son complejas conjugadas.

Nota: Si $b^2 - 4ac > 0$ y es un cuadrado perfecto, las raíces de la ecuación son racionales.

Ejercicios (5).

1) Determine la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $25x^2 - 40x + 16 = 0$ | b) $5x^2 - 3x + 2 = 0$ | c) $2x^2 + 7x + 6 = 0$ |
| d) $3x^2 + 4 = 0$ | e) $3x^2 - 8x + 4 = 0$ | |

2) Determine el valor de k en cada una de las siguientes ecuaciones de modo que sus raíces sean iguales:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| a) $kx^2 - 24x + 9 = 0$ | b) $kx^2 + 3kx + k + 5 = 0$ | c) $4x^2 - (k-6)x + 2k + 21 = 0$ |
|-------------------------|-----------------------------|----------------------------------|

VI. Relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática.

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Sus raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Suma** de las raíces de la ecuación cuadrática:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

- **Producto de las raíces** de la ecuación cuadrática:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Estas dos relaciones permiten resolver una serie de problemas como el siguiente.

Ejemplo. Determinar el valor de m en la ecuación: $6x^2 - mx + 15 = 0$, sabiendo que la suma de sus raíces es 1.

Solución. Datos: $a = 6$ $b = -m$ $c = 15$ $x_1 + x_2 = 1$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{-m}{6}$$

$$1 = -\frac{-m}{6} \quad \Rightarrow \quad m = 6$$

Ejercicios (6).

- Determine el valor del coeficiente literal en cada una de las siguientes ecuaciones:
 - $x^2 + tx - 4 = 0$, cuando sus raíces son opuestas.
 - $x^2 + 6x - m = 0$, cuando una raíz es el doble de la otra.
 - $x^2 + 17x + k = 0$, cuando la diferencia entre sus raíces es 3.
- Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, formar la ecuación cuyas raíces son: $\alpha + \frac{2}{\beta}$ y $\beta + \frac{2}{\alpha}$
- ¿Qué valor debe tomar m en la ecuación $mx^2 - 2mx + m = 2x - 2$ para que sus raíces sean dos enteros consecutivos?

VII. Problemas

- Encontrar dos números tales que su suma sea 34 y su producto 273.
- Encontrar un número tal que dos veces su cuadrado exceda al propio número en 45.
- El perímetro de un rectángulo es 320cm. Calcular su área si su largo es el triple de su ancho.
- La diferencia entre los lados de un rectángulo es 70 cm. Calcular esos lados sabiendo que su diagonal mide 130 cm.
- Dos motoristas distanciados por 130 km., parten para encontrarse. Si la velocidad de uno es de 30 km/h y la velocidad del otro es 33 más que el número de horas que pasan antes del encuentro. Determinar la distancia recorrida por ambos antes de encontrarse y el tiempo transcurrido desde que partieron.
- Una lámina rectangular de aluminio de perímetro 96cm se utiliza para confeccionar una caja sin tapa. Para ello se corta un cuadrado de 4cm de lado en cada esquina y se sueldan los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina usada si el volumen de la caja es de 768cm^3 ?
- Un grupo de jóvenes decide pagar por partes iguales el arriendo de \$14.000 de un bote. A última hora, tres de los jóvenes se arrepintieron, con lo cual la cuota de cada uno de los restantes jóvenes subió en \$1.500.
 - ¿Cuántos jóvenes había en el grupo original? [Resp. 7 jóvenes]
 - ¿Cuánto pagó cada uno de los jóvenes del grupo final? [Resp. \$3500]

