

POLAREN AM KREIS

Helmut Frühinsfeld (aka ottogal)

September 2017

1 Vorbemerkungen

Wir verwenden ein kartesisches x_1, x_2 -Koordinatensystem.

Zu jedem Punkt $X(x_1|x_2)$ gehört der Ortsvektor $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(Analog hat $A(a_1|a_2)$ den Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, usw.)

Der Vektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor.

Das **Skalarprodukt** zweier Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (1)$$

Insbesondere ist

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 \quad (2)$$

und somit

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad (3)$$

Für $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ ist

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \quad (4)$$

gleichbedeutend damit, dass \vec{a} und \vec{b} aufeinander senkrecht stehen.

2 Der Einheitskreis

O.B.d.A. sei der betrachtete Kreis stets der **Einheitskreis** mit dem Mittelpunkt $O(0|0)$ und dem Radius 1.

Ein Punkt X liegt genau dann auf dem Einheitskreis, wenn sein Ortsvektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ die Gleichung

$$\vec{x} \bullet \vec{x} = 1 \quad (5)$$

erfüllt. Nach Gleichung (1) lautet sie ausgeschrieben

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (6)$$

3 Definition der Polare eines Punktes

Sei P ein beliebiger, von $O(0|0)$ verschiedener Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ (der also nicht der Nullvektor ist).

Die Gerade mit der Gleichung

$$\vec{p} \bullet \vec{x} = 1 \quad (7)$$

heißt die **Polare von P** (bezüglich des Einheitskreises); wir bezeichnen sie mit $p(P)$.

P heißt dann der **Pol** der Geraden $p(P)$.

Bemerkung:

Gleichung (7) stellt in der Tat eine Gerade dar; denn mit (1) wird daraus $p_1x_1 + p_2x_2 - 1 = 0$, und dies hat die Form der allgemeinen Geradengleichung $ax_1 + bx_2 + c = 0$.

4 Beziehungen zwischen Pol und Polare

Wir betrachten einen Punkt A und seine Polare $p(A)$.

Mit A_0 bezeichnen wir den Schnittpunkt von $p(A)$ mit der Geraden OA .

4.1 Satz

Die Gerade OA und die Polare $p(A)$ stehen aufeinander senkrecht.

Beweis:

Die Polare $p(A)$ hat gemäß (7) die Gleichung

$$\vec{a} \bullet \vec{x} = 1 \quad (8)$$

Dies ist die Normalenform einer Geradengleichung mit dem Normalenvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.

\vec{a} ist aber zugleich Richtungsvektor der Geraden OA .

□

4.2 Satz

Liegt A auf dem Kreis, so ist $p(A)$ die Tangente an den Kreis im Berührungspunkt A .

Beweis:

Der Ortsvektor \vec{a} des Kreispunktes A muss die Kreisgleichung (5) erfüllen, es gilt also

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = 1 \quad (9)$$

Dies heißt aber, dass \vec{a} auch die Polargleichung (8) erfüllt - A ist also gemeinsamer Punkt von Kreis und Polare.

Subtrahiert man die Gleichungen (8) und (9), erhält man

$$\vec{a} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad (10)$$

d.h. für jeden Punkt X auf der Polaren $p(A)$ stehen die Vektoren \vec{a} und $(\vec{x} - \vec{a})$ aufeinander senkrecht.

\vec{a} ist aber ein Radiusvektor, und $(\vec{x} - \vec{a})$ Richtungsvektor der Polaren. Daher ist diese die Tangente an den Kreis in A .

□

4.3 Satz

Die Streckenlängen $|OA|$ und $|OA_0|$ sind reziprok zueinander, d.h. ihr Produkt ist 1:

$$|OA| \cdot |OA_0| = 1 \quad (11)$$

Beweis:

Die Gerade OA hat die Parametergleichung

$$\vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} \quad (12)$$

Wir bestimmen den Wert des Parameters λ für $\vec{a}_0 = \overrightarrow{OA_0}$:

Einsetzen in die Gleichung (8) von $p(A)$ ergibt

$$\vec{a} \bullet \vec{a}_0 = 1 \quad (13)$$

$$\vec{a} \bullet (\lambda \cdot \vec{a}) = 1 \quad (14)$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} \bullet \vec{a}) = 1 \quad (15)$$

Wegen $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2 = |OA|^2$ erhält man den Wert

$$\lambda = \frac{1}{|OA|^2} \quad (16)$$

Damit folgt

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|OA|^2} \cdot \vec{a} \quad (17)$$

$$|\vec{a}_0| = \frac{1}{|OA|^2} \cdot |\vec{a}| \quad (18)$$

und mit $|\vec{a}_0| = |OA_0|$

$$|OA_0| = \frac{1}{|OA|^2} \cdot |OA| \quad (19)$$

$$|OA_0| = \frac{1}{|OA|} \quad (20)$$

□

4.4 Satz

Liegt A innerhalb des Kreises, so liegt A_0 außerhalb des Kreises. Die Polare $p(A)$ hat daher keinen Punkt mit dem Kreis gemeinsam.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 4.3 und 4.2.

□

4.5 Satz

Liegt A außerhalb des Kreises, so schneidet $p(A)$ den Kreis in zwei Punkten. Diese sind die **Berührungspunkte der Tangenten von A an den Kreis**.

Beweis:

Wegen Satz 4.3 muss in diesem Fall A_0 innerhalb des Kreises liegen, weshalb $p(A)$ den Kreis in zwei Punkten schneidet.

Die Schnittpunkte von Kreis und Polare müssen die beiden Gleichungen (5) und (8) erfüllen, also auch deren Differenz

$$(\vec{x} - \vec{a}) \bullet \vec{x} = 0 \quad (21)$$

Für diese Punkte stehen also der Radiusvektor \vec{x} und der Verbindungsvektor zu A , $(\vec{x} - \vec{a})$, aufeinander senkrecht; letzterer ist also Richtungsvektor der Tangenten in X .

□

5 Beziehungen zwischen verschiedenen Polaren

5.1 Satz

Liegt ein Punkt auf der Polaren eines anderen, so geht seine Polare durch diesen.

Geht eine Gerade durch den Pol einer anderen, so liegt ihr Pol auf dieser.

Beweis:

Die Gleichung

$$\vec{p} \bullet \vec{q} = 1 \quad (22)$$

lässt sich auf zwei Arten lesen:

Der Ortsvektor \vec{q} des Punktes Q erfüllt die Gleichung $\vec{p} \bullet \vec{x} = 1$ der Polaren $p(P)$

oder

Der Ortsvektor \vec{p} des Punktes P erfüllt die Gleichung $\vec{q} \bullet \vec{x} = 1$ der Polaren $p(Q)$

(Das Skalarprodukt ist ja kommutativ.)

Die beiden Aussagen

$$Q \text{ liegt auf } p(P) \quad \text{und} \quad P \text{ liegt auf } p(Q)$$

sind daher gleichwertig.

□

5.2 Satz

Der Schnittpunkt zweier Polaren ist der Pol der Verbindungsgeraden ihrer Pole.
Die Verbindungsgerade zweier Pole ist die Polare des Schnittpunkts ihrer Polaren.

Beweis:

Wegen Satz 5.1 sind folgende Aussagen gleichwertig:

S ist der Schnittpunkt von $p(P)$ und $p(Q)$

S liegt auf $p(P)$ \wedge S liegt auf $p(Q)$

P liegt auf $p(S)$ \wedge Q liegt auf $p(S)$

$$p(S) = PQ$$

□

Bemerkung:

Mit 5.2 lässt sich ein eleganter Beweis von Satz 4.5 führen:

Ist T ein Schnittpunkt der Polaren $p(A)$ mit dem Kreis, so ist er wegen 4.2 gleich dem Schnittpunkt von $p(A)$ mit $p(T)$ und daher nach 5.2 der Pol der Geraden AT . Diese ist also identisch mit $p(T)$ und daher wegen 4.2 die Tangente in T .

5.3 Satz

Liegen drei Punkte auf derselben Geraden (die nicht durch O geht), so gehen ihre Polaren durch einen gemeinsamen Punkt.

Gehen drei Geraden durch denselben Punkt, so liegen ihre Pole auf einer gemeinsamen Geraden (die nicht durch O geht).

Beweis:

Sei S der Schnittpunkt von $p(P)$ und $p(Q)$. Nach Satz 5.2 ist das gleichbedeutend mit

$$p(S) = PQ$$

Folgende Aussagen sind daher gleichwertig:

R liegt auf PQ

R liegt auf $p(S)$

und wegen Satz 5.1

S liegt auf $p(R)$

Gleichwertig sind also auch die Aussagen

P , Q und R liegen auf einer Geraden

und

$p(P)$, $p(Q)$ und $p(R)$ gehen durch einen Punkt

□