## Produktregel

Für alle $x_0$ ,bei denen sowohl die Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ als auch die Funktion $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = g(x)$ differenzierbar ist, ist auch die Produktfunktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle $x_0$ differenzierbar und es gilt: $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

**Merkregel**

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: \quad (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}'$$

**Verallgemeinerte Produktregel**

Die Ableitung eines Produkts von n differenzierbaren Funktionen besteht aus der Summe von n Summanden, wobei der Reihe nach jeweils genau ein Faktor differenziert und mit den unveränderten anderen Faktoren multipliziert wird.

Z.B.: $(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$

## Beweis: Produktregel

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \left( \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} \right)$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

*Trick: Subtraktion und anschließende Addition von f($x_0$)·g($x_1$) im Zähler. Durch Umformen und Anwenden der Grenzwertsätze erhält man die Produktregel.*

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_1) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{g(x_1) \cdot [f(x_1) \cdot (-f(x_0))] + f(x_0) \cdot [g(x_1) - g(x_0)]}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \left[ g(x_1) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} \right]$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \left[ g(x_1) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] + \lim_{x \mapsto x_0} \left[ f(x_0) \cdot \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} \right]$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} g(x_1) \cdot \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0) \lim_{x \mapsto x_0} \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = g(x_1) \cdot f'(x_1) + f(x_1) \cdot g'(x_1)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ∎