

Hoofdstuk V: exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

August 2, 2020

1 lineaire versus exponentiële groei

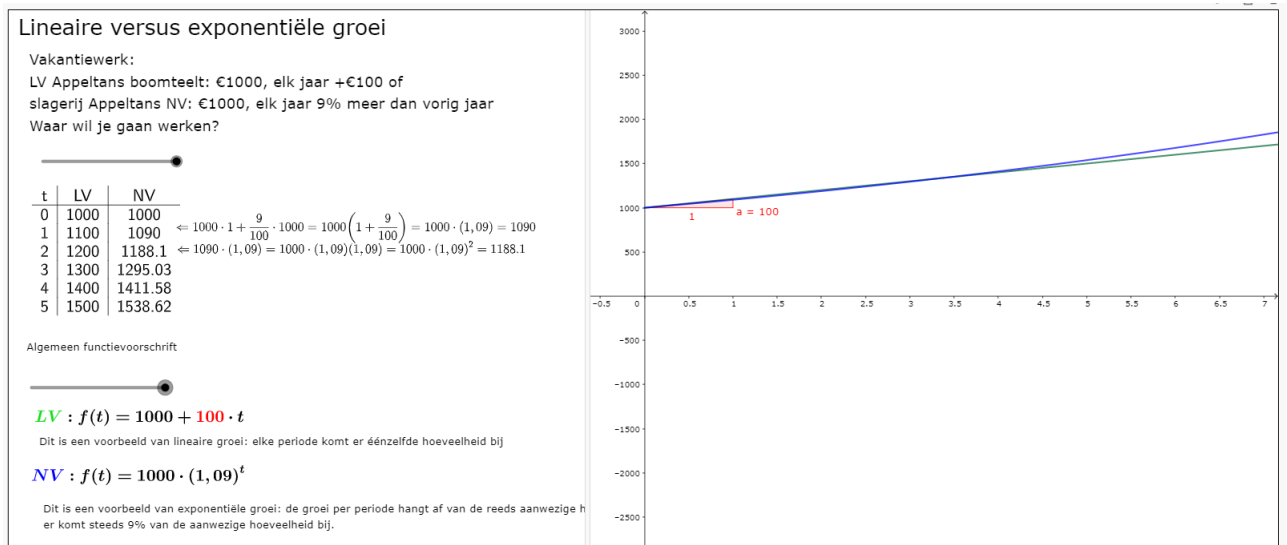


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6>

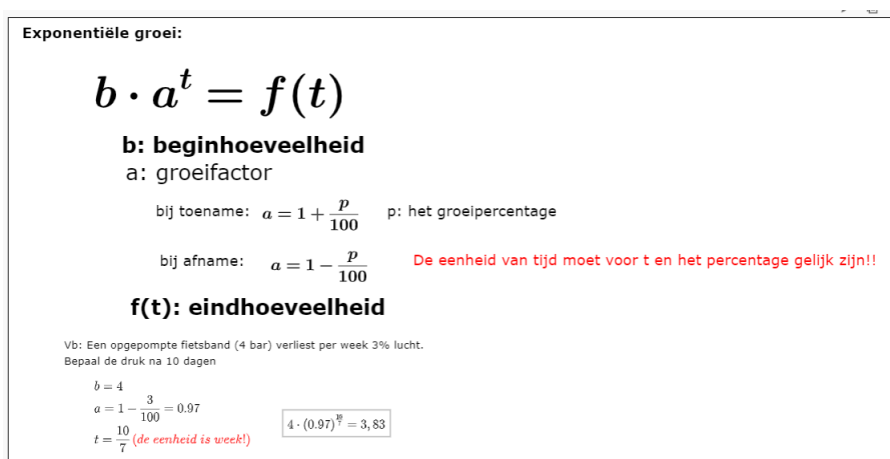


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/m3zxeue6>

2 grafiek exponentiële functies

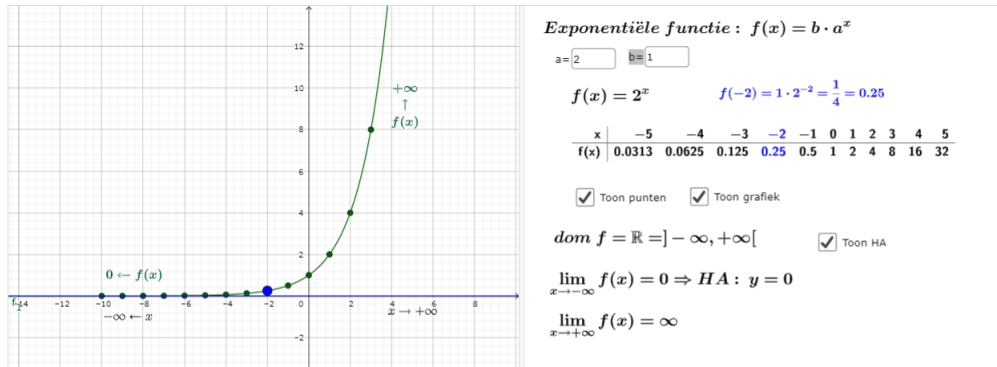


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z>

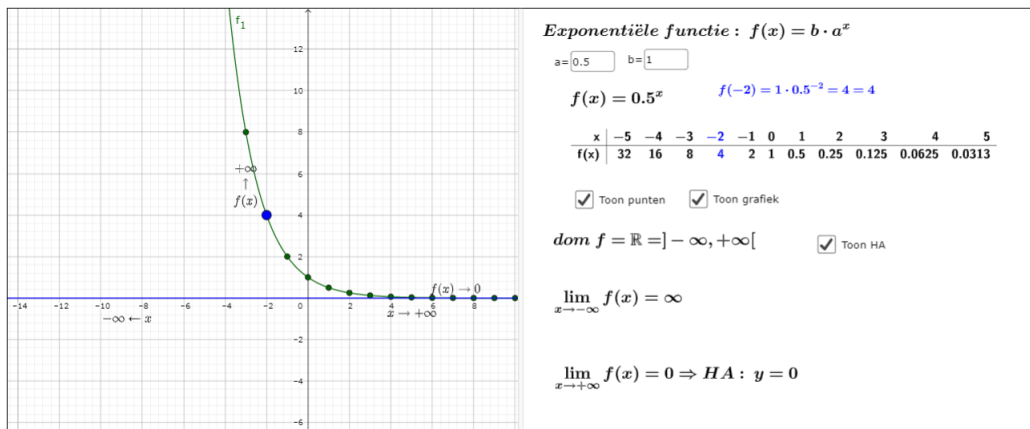


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z>

3 logaritmen

Definitie

3 : exponent
 $2^3 = 8$
 2 : grondtal 8 : uitkomst

Gegeven : grondtal en uitkomst
 Gevraagd : exponent

Voorbeeld :
 grondtal : 4 $4^y = 64$ nieuwe notatie $y = \log_4 64 \Rightarrow \log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$
 uitkomst : 64
 gevraagd : exponent

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$

$\log_2 8 = 3$ want $2^3 = 8$

$\log_4 1 = 0$ want $4^0 = 1$

$\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$ want $(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$

$\log_3(-9) = /$ want $3^x > 0$

Speciale notaties:
 $\log_{10} 100 \xrightarrow[\text{wordt niet getoerd}]{\text{grondtal 10}}$ $\log 100 = 2$ want $10^2 = 100$
 $\log_e \sqrt{e} \xrightarrow[\text{notatie}]{\text{nieuwe}}$ $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ want $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF>

Rekenregels

Logaritme van een product :
 $\log_2 32 = \log_2(4 \cdot 8) \quad \log_2 4 \quad \log_2 8$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $5 = 2 + 3 \Rightarrow \log_2(4 \cdot 8) = \log_2(4) + \log_2(8) \quad \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

Logaritme van een quotiënt :
 $\log_3 27 = \log_3\left(\frac{81}{3}\right) \quad \log_3 81 \quad \log_3 3$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $3 = 4 - 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{81}{3}\right) = \log_3 81 - \log_3 3 \quad \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Logaritme van een macht :
 $\log_4 64 = \log_4(4^3) \quad \log_4 4$
 $\parallel \quad \parallel$
 $3 = 3 \cdot 1 \Rightarrow \log_4(4^3) = 3 \cdot \log_4 4 \quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$

Verandering van grondtal :
 $3^x = 7$
 $\swarrow \text{def} \quad \searrow (\text{los vgl op})$
 $x = \log_3 7 \quad \log(3^x) = \log 7$
 $\Leftrightarrow x \cdot \log 3 = \log 7 \Rightarrow \log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 3}$

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF>

4 logaritmische functies

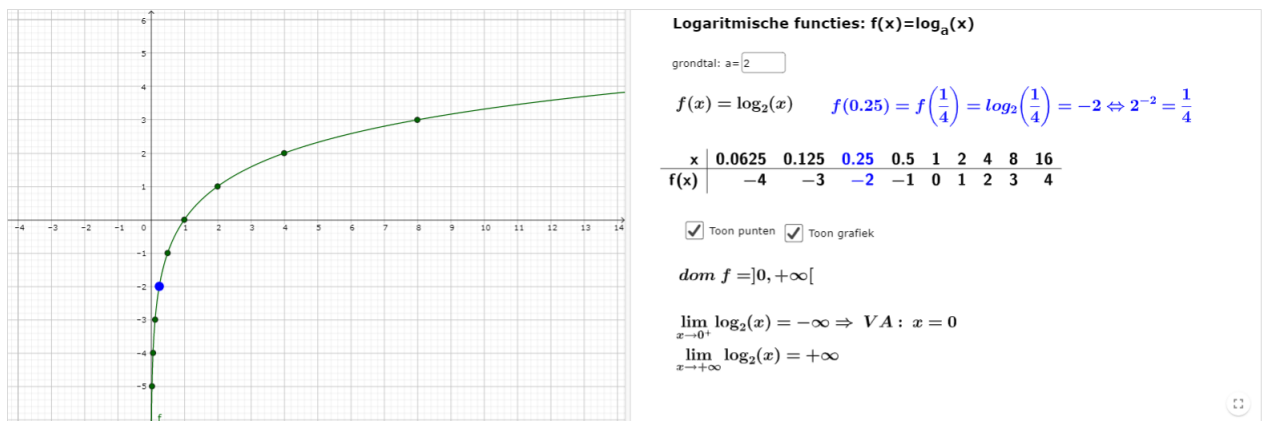


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut>

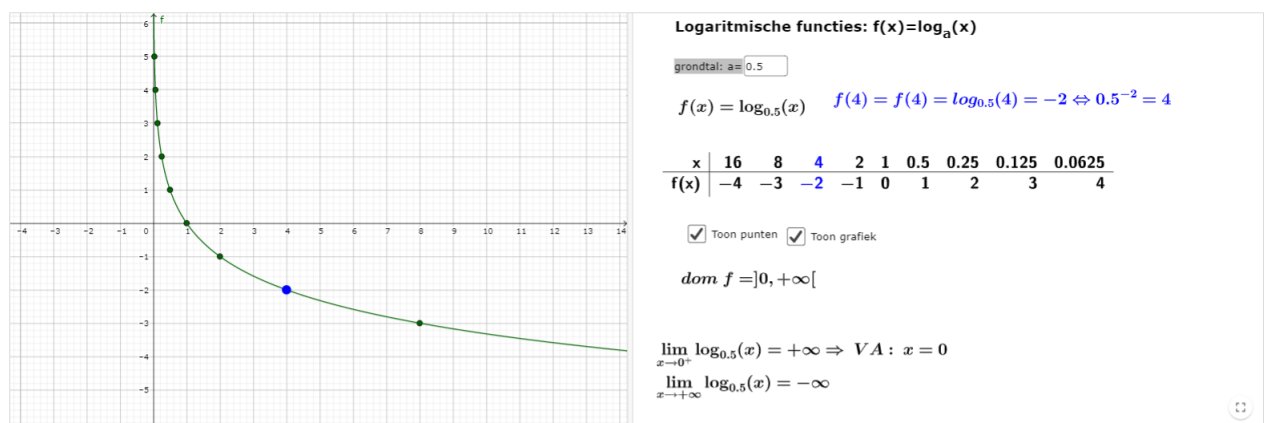


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut>

5 verband grafieken exponentiële functies en logaritmische functies met hetzelfde grondtal

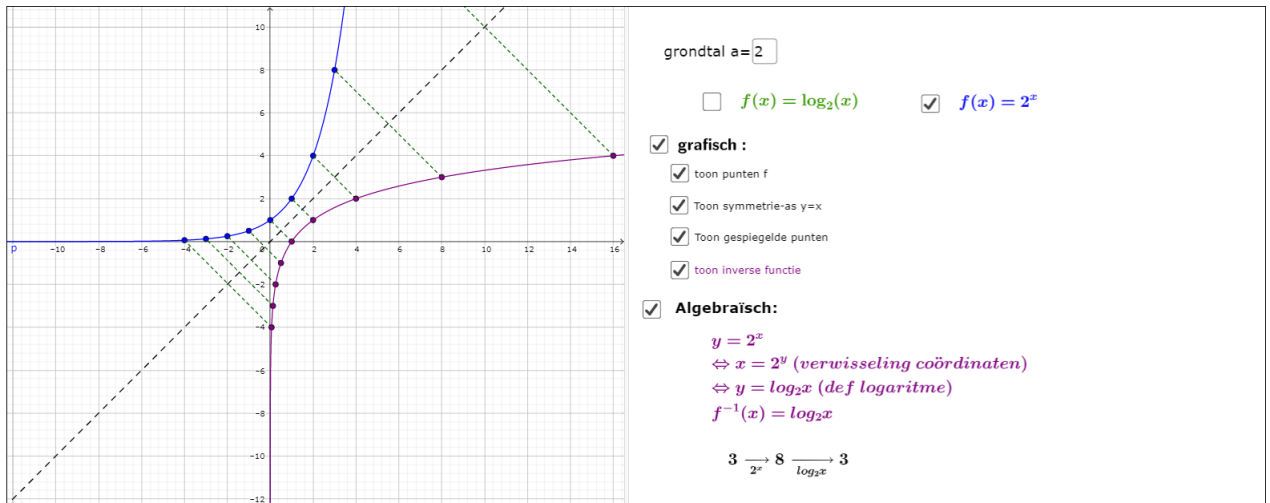


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/YYevVAPy>

6 exponentiële vergelijkingen

Voorbeeld 1 :

$$27^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-4}$$

$$\Leftrightarrow (3^3)^x = (3^{-1})^{5x-4}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{-5x+4}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -5x + 4$$

$$\Leftrightarrow 8x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

Voorbeeld 1 : $3^{4x+5} = 5^{x-1}$

$$\Leftrightarrow \log 3^{4x+5} = \log 5^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (4x + 5) \log 3 = (x - 1) \log 5$$

$$\Leftrightarrow (4 \log 3)x + 5 \log 3 = (\log 5)x - \log 5$$

$$\Leftrightarrow (4 \log 3 - \log 5)x = -\log 5 - 5 \log 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\log 5 - 5 \log 3}{4 \log 3 - \log 5}$$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

7 logaritmische vergelijkingen

Voorbeeld 1 : $2 \log_4 x = 5$

$$\Leftrightarrow \log_4 x = \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 4^{\frac{5}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$$

Voorbeeld 2 : $20 \cdot \ln(0, 2x) = 30$

$$\Leftrightarrow \ln(0, 2x) = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0, 2x = e^{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{0, 2}$$

Voorbeeld 3 : $\log_3(2x) - \log_3(x - 3) = 1$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x}{x-3}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x-3} = 3^1$$
$$\Leftrightarrow 2x = 3(x-3)$$
$$\Leftrightarrow x = 9$$

Bij logaritmische vergelijkingen, moet je nog altijd controleren of de oplossing wel kan. Je kan immers een logaritme alleen nemen van een positief getal.

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/NRMRHcaf>

7.1 oefeningen

7.2 taken

1. zoek een eigentijds voorbeeld van exponentiële groei en verzin er zelf een oef bij (geen voorbeeld van een 'wiskunde'site)
2. exponentiële vergelijkingen
3. logaritmische vergelijkingen