บทที่ 4
การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

"การให้เหตุผลเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตเป็นการฝึกการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ และฝึกการสื่อความหมายโดยใช้ภาษาแสดงเหตุผลอย่างมีลำดับขั้นตอนและสมเหตุสมผล สามารถนำไปใช้ในการวางแผนงาน การตัดสินใจ และการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน การมีหลักในการคิด คิดอย่างเป็นขั้นตอนและมีเหตุผล เป็นทักษะที่สำคัญและจำเป็นอย่างหนึ่งในการใช้ชีวิตและการทำงานของคนรุ่นใหม่ในศตวรรษที่ 21"

4.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

ข้อความคาดการณ์

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ข้อสรุปที่ได้จากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง ซึ่งเชื่อว่ามีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง เรียกข้อสรุปนั้นว่า **ข้อความคาดการณ์ (conjecture)** เช่น

ข้าวปั้นสังเกตจำนวนที่เรียงตามลำดับ ดังต่อไปนี้ 2, 4, 6, 8, 10, ...

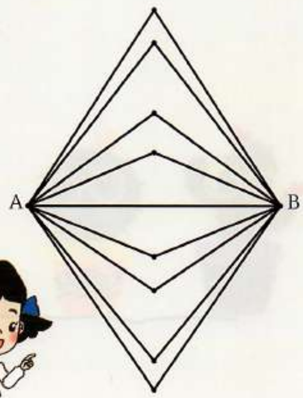
เขาสังเกตเห็นแบบรูปว่า

จำนวนที่ 1 คือ 2 ซึ่งเท่ากับ 2×1
จำนวนที่ 2 คือ 4 ซึ่งเท่ากับ 2×2
จำนวนที่ 3 คือ 6 ซึ่งเท่ากับ 2×3
จำนวนที่ 4 คือ 8 ซึ่งเท่ากับ 2×4
จำนวนที่ 5 คือ 10 ซึ่งเท่ากับ 2×5
⋮

จากนั้น เขาจึงสร้างข้อความคาดการณ์ว่า จำนวนที่ n เท่ากับ 2n

ถ้าต้องการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง ก็ต้องสืบเสาะค้นหาข้อมูลมาสนับสนุนให้เพียงพอหรือแสดงเหตุผลที่ทำให้ยอมรับได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง

ชวนคิด 4.1



ข้าวหอมสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วบนฐาน AB หลาย ๆ รูป โดยให้ด้านประกอบมุมยอดมีความยาวต่าง ๆ กัน ดังตัวอย่าง

นักเรียนจะสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งหลายที่ข้าวหอมสร้าง ได้อย่างไรบ้าง

ประโยคมีเงื่อนไข

ในชีวิตประจำวัน เราอาจพบข้อความที่มีลักษณะเป็นประโยคมีเงื่อนไข โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น

1. ถ้า □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้ว □ABCD มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน
2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

ประโยคมีเงื่อนไขดังกล่าวมีรูปแบบเดียวกัน คือ ประกอบด้วยข้อความสองข้อความที่เชื่อมด้วย ถ้า...แล้ว... เรียกข้อความที่ตามหลัง ถ้า ว่า เหตุ และเรียกข้อความที่ตามหลัง แล้ว ว่า ผล

ข้อความที่เป็นประโยคมีเงื่อนไขที่เราใช้กันอยู่ บางครั้งอาจไม่ปรากฏในรูป ถ้า...แล้ว... อย่างชัดเจน เช่น จำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว เป็นจำนวนคู่ สามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปประโยค ถ้า...แล้ว... ได้เป็น ถ้าจำนวนนับใดหารด้วย 2 ลงตัว แล้วจำนวนนับนั้นเป็นจำนวนคู่

สำหรับในชั้นนี้ ประโยคมีเงื่อนไข ถ้า... แล้ว... จะพิจารณาเฉพาะกรณีต่อไปนี้

1. **ประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริง** ประโยคมีเงื่อนไขนี้ เมื่อเหตุเป็นจริง แล้วทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ
2. **ประโยคมีเงื่อนไขไม่เป็นจริง** ประโยคมีเงื่อนไขนี้ เมื่อเหตุเป็นจริง แล้วไม่ทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอไป

บทกลับของประโยคมีเงื่อนไข

พิจารณาประโยคมีเงื่อนไข ต่อไปนี้

"ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้ว ΔABC จะมีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก" ซึ่งเป็นจริง

ถ้าเรานำ "ผล" ของประโยคมีเงื่อนไขนี้มาเป็น "เหตุ" และนำ "เหตุ" ของประโยคมีเงื่อนไขนี้มาเป็น "ผล" เราจะได้ บทกลับของประโยคมีเงื่อนไข เป็นประโยคมีเงื่อนไขใหม่ดังนี้

"ถ้า ΔABC มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก แล้ว ΔABC จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก" จะเห็นว่าประโยคมีเงื่อนไขนี้เป็นจริง

พิจารณาประโยคมีเงื่อนไข ต่อไปนี้

"ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว" ซึ่งเป็นจริง

ถ้าเรานำ "ผล" ของประโยคมีเงื่อนไขนี้มาเป็น "เหตุ" และนำ "เหตุ" ของประโยคมีเงื่อนไขนี้มาเป็น "ผล" เราจะได้ บทกลับของประโยคมีเงื่อนไข เป็นประโยคมีเงื่อนไขใหม่ดังนี้

"ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า" จะเห็นว่าประโยคมีเงื่อนไขนี้ไม่เป็นจริงเสมอไป

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า ถ้าประโยคมีเงื่อนไขใดเป็นจริง แล้วบทกลับของประโยคนั้นอาจเป็นจริงหรือไม่เป็นจริงก็ได้

3. จงเขียนประโยคที่เชื่อมด้วย "ก็ต่อเมื่อ" ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปประโยคมีเงื่อนไข 2 ประโยค
   1) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก็ต่อเมื่อ ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นยาวเท่ากันสองคู่

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   2) รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีขนาดของมุมเท่ากันสองมุม ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

การให้เหตุผลทางเรขาคณิตมีความเกี่ยวข้องกับ **คำอนิยาม (undefined term)** **บทนิยาม (definition)** **สัจพจน์ (axiom; postulate)** และ **ทฤษฎีบท (theorem)**

ในทางคณิตศาสตร์มีคำบางคำที่ใช้เป็นพื้นฐานในการสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องกำหนดความหมายของคำ คำเหล่านี้เป็น คำอนิยาม ตัวอย่างคำอนิยามในเรขาคณิต ได้แก่ จุด เส้นตรง และระนาบ

เมื่อเริ่มต้นกล่าวถึงเนื้อหาสาระใด หลังจากกำหนดคำอนิยามแล้ว จะต้องให้ความหมายที่ชัดเจนและรัดกุมของคำต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระนั้น ๆ ในรูป บทนิยาม เช่น

บทนิยามของรังสี

รังสี คือ ส่วนหนึ่งของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว

บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และมีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

กิจกรรม : ทำได้ไหม

1. จงเขียนบทกลับของประโยคมีเงื่อนไขต่อไปนี้
   1) ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
   บทกลับ :
   ....
   ....
   ....
   ....

   2) ถ้า □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน แล้วเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของ □ABCD ตัดกันเป็นมุมฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
   บทกลับ :
   ....
   ....
   ....
   ....

2. จงเขียนประโยคมีเงื่อนไขและบทกลับของประโยคมีเงื่อนไขที่ได้ในข้อ 1 ให้เป็นประโยคที่เชื่อมด้วย "ก็ต่อเมื่อ"
   1)
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   2)
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

ชวนคิด 4.2

จากประโยคมีเงื่อนไข "ถ้ามะเหมี่ยวอยู่ที่จังหวัดสงขลา แสดงว่ามะเหมี่ยวอยู่ในประเทศไทย"

ให้นักเรียนเขียนบทกลับของประโยคข้างต้น พร้อมทั้งอธิบายว่าบทกลับที่ได้เป็นจริงหรือไม่

ในทางคณิตศาสตร์เมื่อประโยคมีเงื่อนไขเป็นจริงและมีบทกลับเป็นจริง อาจเขียนเป็นประโยคเดียวกันโดยใช้คำว่า ก็ต่อเมื่อ เชื่อมข้อความทั้งสองในประโยคมีเงื่อนไขนั้นได้ และประโยคที่ได้ก็จะเป็นจริงด้วย เช่น

ประโยคมีเงื่อนไข : "ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน" ซึ่งเป็นจริง

บทกลับ : "ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว" ซึ่งเป็นจริง

เขียนเป็นประโยคเดียวกัน ได้ดังนี้

"รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว **ก็ต่อเมื่อ** รูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน" ซึ่งประโยคนี้ก็จะเป็นจริงด้วย

ในทางกลับกัน เมื่อมีประโยคที่เชื่อมด้วย ก็ต่อเมื่อ ซึ่งเป็นจริง เราสามารถเขียนประโยคนั้นเป็นประโยคมีเงื่อนไขสองประโยค ซึ่งแต่ละประโยคนั้นก็จะเป็นจริงด้วย เช่น

"รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว **ก็ต่อเมื่อ** รูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน" สามารถเขียนได้เป็น

"ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน"

และ "ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว"

ข้อความในบทนิยามทุกบทนิยาม สามารถเขียนให้เป็นประโยคที่เชื่อมด้วย "ก็ต่อเมื่อ" ได้เสมอ เช่น จากบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสข้างต้น สามารถเขียนได้เป็น
"รูปสี่เหลี่ยมใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก็ต่อเมื่อ รูปสี่เหลี่ยมนั้นมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากและมีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน"

การให้เหตุผลในการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ว่าเป็นจริงหรือไม่นั้น อาจต้องใช้ข้อความบางข้อความที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ เรียกข้อความเหล่านั้นว่า **สัจพจน์** เราใช้สัจพจน์เป็นส่วนหนึ่งของการให้เหตุผล สัจพจน์ในวิชาเรขาคณิตที่นักเรียนเคยทราบและใช้มาแล้วในการให้เหตุผล เช่น

1. มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้
2. เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน จะตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น
3. สามารถต่อส่วนของเส้นตรงออกไปทั้งสองข้างได้ โดยให้มีความยาวตามที่ต้องการ
4. สามารถลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้นั้น

การพิสูจน์

ข้อความทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่อยู่ในรูปประโยคมีเงื่อนไข การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยคมีเงื่อนไขแบ่งเป็น 2 กรณีคือ

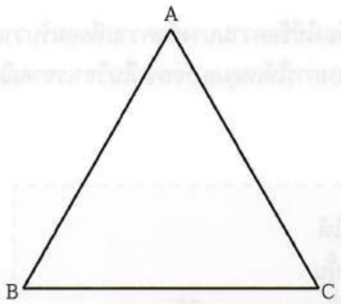
1. การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง
2. การพิสูจน์ว่าข้อความไม่เป็นจริง

โดยทั่วไป การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงนั้น จะต้องให้เหตุผลเพื่อแสดงว่า เมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นทำให้เกิดผลที่เป็นจริงเสมอ โดยเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้แล้วอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์ว่าเป็นจริง และสมบัติต่าง ๆ อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างประกอบกันมาให้เหตุผล เพื่อสรุปให้ได้ว่าผลที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

สำหรับการพิสูจน์ว่าข้อความไม่เป็นจริง เรามีวิธีง่าย ๆ คือ ยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่กำหนดให้หรือเหตุ แต่ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริง เรียกตัวอย่างเช่นนี้ว่า **ตัวอย่างค้าน (counterexample)**

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



แนวคิดในการพิสูจน์ เขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์ในรูปประโยคมีเงื่อนไขได้ว่า "ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว"

ในการพิสูจน์ข้อความนี้ อาจให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง ซึ่งเป็นตัวแทนของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าใด ๆ แล้วพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้ บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสามด้าน และบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วคือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ต้องการพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

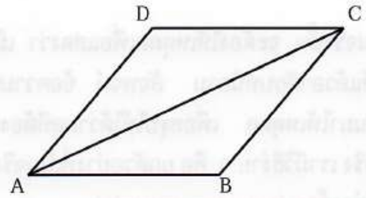
พิสูจน์ เนื่องจาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (กำหนดให้)

ดังนั้น $AB = BC = AC$ (รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสามด้าน)

จะได้ $AB = AC$

ดังนั้น ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยมี $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มี $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม

ต้องการพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์ เนื่องจาก $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (กำหนดให้)

จะได้ว่า $AB = CB$ (ด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาวเท่ากัน)

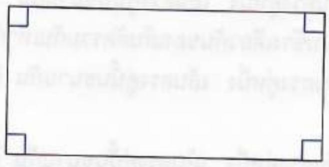
ดังนั้น ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่าข้อความ "รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส" ไม่เป็นจริง

พิสูจน์ เนื่องจากมีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปนั้นคือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป

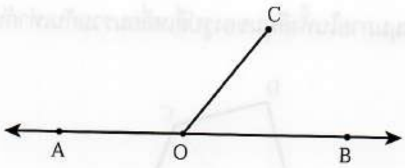
แนวคิดในการพิสูจน์
จะต้องหารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



ดังนั้น ข้อความที่กล่าวว่า "รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส" ไม่เป็นจริงเสมอไป
นั่นคือ ข้อความนี้ไม่เป็นจริง

ข้อความสำคัญทางคณิตศาสตร์ที่พิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง และนำไปใช้ในการอ้างอิงได้ เรียกว่า **ทฤษฎีบท**

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป $\overline{OC}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด O ทำให้เกิดมุมประชิดซึ่งได้แก่ $A\hat{O}C$ และ $C\hat{O}B$ ที่มีจุด O เป็นจุดยอดมุมจุดเดียวกัน และ $\overline{OC}$ เป็นแขนร่วมของมุม

เนื่องจาก $A\hat{O}B$ เป็นมุมตรง ดังนั้น $A\hat{O}B = 180^\circ$

และเนื่องจาก $A\hat{O}C + C\hat{O}B = A\hat{O}B$

ดังนั้น $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 180^\circ$

การให้เหตุผลข้างต้นเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งกล่าวว่า "ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งทำให้เกิดมุมประชิดที่มีขนาดของมุมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก"

นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิตที่นักเรียนเคยทราบมาแล้ว และสามารถนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ได้ เช่น

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

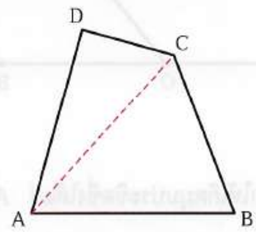
ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ทฤษฎีบท ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า ขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 360 องศา



กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง

ต้องการพิสูจน์ว่า $D\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A = 360^\circ$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AC}$

เนื่องจาก $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^\circ$

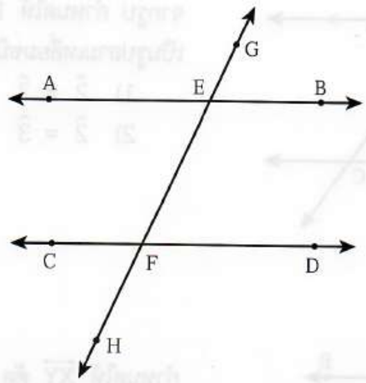
และ $C\hat{A}D + A\hat{D}C + D\hat{C}A = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

จะได้ $(C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A) + (C\hat{A}D + A\hat{D}C + D\hat{C}A) = 180 + 180 = 360^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$(C\hat{A}B + C\hat{A}D) + A\hat{B}C + (B\hat{C}A + D\hat{C}A) + A\hat{D}C = 360^\circ$

ดังนั้น $D\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A = 360^\circ$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{GH}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ จงหาว่า $G\hat{E}B + C\hat{F}E$ เท่ากับกี่องศา



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{GH}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ

จะได้ $G\hat{E}A = C\hat{F}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

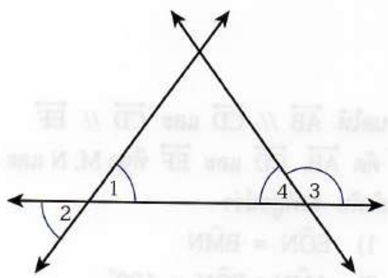
$G\hat{E}B + G\hat{E}A = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

ดังนั้น $G\hat{E}B + C\hat{F}E = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากันโดยแทน $G\hat{E}A$ ด้วย $C\hat{F}E$)

ตอบ 180°

แบบฝึกหัด 4.1

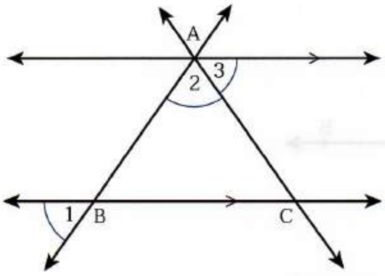
1.



จากรูป กำหนดให้ $\hat{1} = \hat{4}$

จงหาขนาดของ $\hat{2} + \hat{3}$

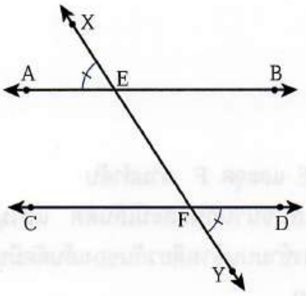
2.



จากรูป กำหนดให้ $\hat{1} = \hat{3}$ รูปสามเหลี่ยม ABC นี้เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เมื่อ

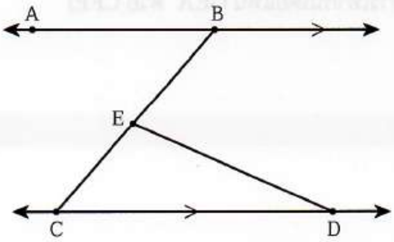
1) $\hat{2} \neq \hat{3}$
2) $\hat{2} = \hat{3}$

3.



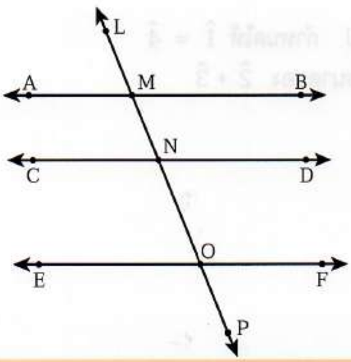
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ และ $A\hat{E}X = D\hat{F}Y$ จงให้เหตุผลว่า เพราะเหตุใด $\overleftrightarrow{AB}$ จึงขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

4.



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overline{DE}$ พบ $\overline{BC}$ ที่จุด E จงพิสูจน์ว่า $B\hat{E}D = A\hat{B}E + E\hat{D}C$

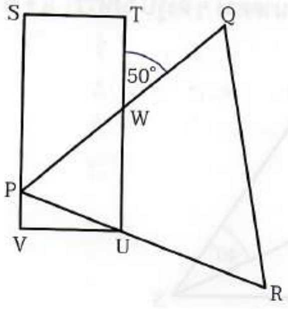
5.



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ // $\overleftrightarrow{EF}$ $\overleftrightarrow{LP}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{EF}$ ที่จุด M, N และ O ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

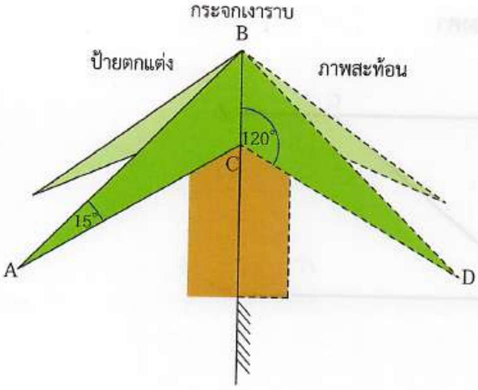
1) $E\hat{O}N = B\hat{M}N$
2) $A\hat{M}N + E\hat{O}N = 180^\circ$

6.



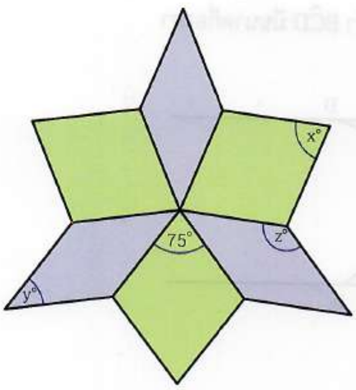
จากรูป กำหนดให้ ΔPQR เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $\square STUV$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ $T\hat{W}Q = 50^\circ$ จงหาขนาดของ $U\hat{P}V$

7.



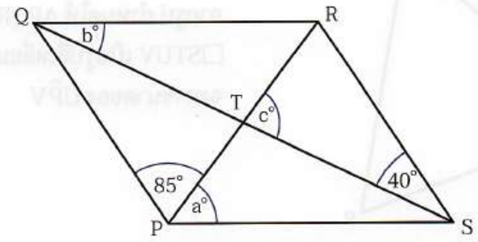
ป้ายตกแต่งหน้าร้านแห่งหนึ่งมีลักษณะดังรูป จงหาขนาดของ $A\hat{B}D$

8.

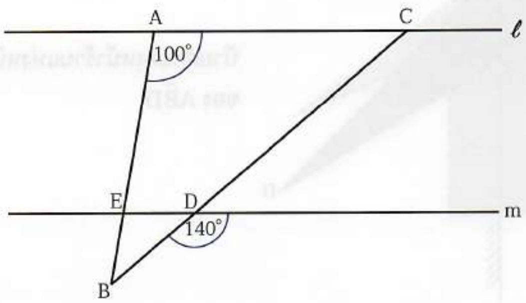


กำหนดให้รูปต่อไปนี้ ประกอบด้วยรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทั้งหมด 6 รูป ซึ่งมีขนาด ดังรูป
จงหาว่า $3(x + y) - z$ มีค่าเท่าไร

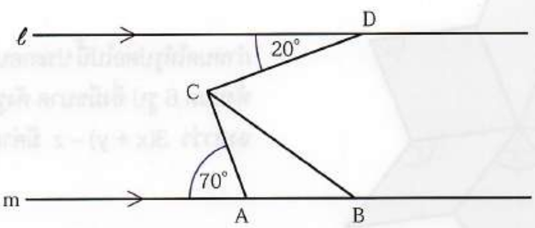
9. กำหนดให้ □PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและกำหนดมุมที่มีขนาดต่าง ๆ ดังรูป จงหาว่า $a + b + c$ มีค่าเท่าไร



10. จากรูป กำหนดให้ ℓ // m จงหาว่า $A\hat{B}C$ มีขนาดกี่องศา



11. จากรูปต่อไปนี้ กำหนดให้ $A\hat{C}B = \frac{1}{3}$ ของ $A\hat{C}D$ จงหาว่า $B\hat{C}D$ มีขนาดกี่องศา



12. จงให้เหตุผลว่า จุดใด ๆ ที่อยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่ง ย่อมอยู่ห่างจากแขนทั้งสองข้างของมุมนั้นเป็นระยะเท่ากัน

13. "รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน ด้านทั้งสี่จะยาวเท่ากัน" ข้อความนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

123 | มุมคณิต

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยยึดความจริงจากส่วนย่อยที่พบเห็นไปสู่ความจริงที่เป็นส่วนรวม เช่น เราพบว่าทุกเช้าดวงอาทิตย์จะขึ้นทางทิศตะวันออก และตอนเย็นดวงอาทิตย์จะตกทางทิศตะวันตก จึงให้ข้อสรุปว่าดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก และตกทางทิศตะวันตก

ในวิชาคณิตศาสตร์ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย เพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ในการแก้ปัญหา เช่น เมื่อสังเกตจากแบบรูปของจำนวน 3, 5, 7, 9, 11 เราสามารถหาจำนวนนับถัดไปจาก 11 อีก 5 จำนวนได้ โดยใช้ข้อสังเกตจากแบบรูปของจำนวนข้างต้นว่า เพิ่มขึ้นทีละสอง ดังนั้น จำนวนนับที่ถัดจาก 11 อีก 5 จำนวน คือ 13, 15, 17, 19 และ 21 การหาจำนวนนับอีก 5 จำนวนที่ได้จากการสังเกตที่กล่าวมาเป็นตัวอย่างของการให้เหตุผลแบบอุปนัย กล่าวโดยสรุปคือ การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลายครั้งจากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

อย่างไรก็ตาม การใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัย เพื่อหาข้อสรุปหรือความจริงนั้นไม่จำเป็นต้องได้ข้อสรุปที่ถูกต้องทุกครั้ง เนื่องจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลจากหลักฐานหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ ดังนั้น ข้อสรุปจะเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูล หลักฐานหรือข้อเท็จจริงที่นำมาอ้างอิง ข้อสรุปนี้อาจจะไม่เป็นจริงเสมอไป แต่อาจเป็นจริงในขอบเขตจำกัด หรือข้อสรุปอาจมีหลายคำตอบ เมื่อมีจำนวนข้อมูลไม่มากเพียงพอ

พิจารณาการให้เหตุผลแบบอุปนัยต่อไปนี้

1) ข้าวหอมสังเกตเห็นว่า $1^2 \geq 1,\ 2^2 \geq 2,\ 3^2 \geq 3,\ 4^2 \geq 4$

ดังนั้น ข้าวหอมจึงสรุปว่า $x^2 \geq x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่เป็นจำนวนบวกใด ๆ

ข้อสรุปนี้ไม่เป็นจริง เช่น ถ้า $x = \frac{1}{2}$ จะได้ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

แต่ข้อสรุปของข้าวหอมจะเป็นจริง ถ้ากำหนดให้ x เป็นจำนวนนับ

123 มุมคณิต (ต่อ)

2) จากจำนวน 2, 4, 6 ให้หาจำนวนนับถัดไป

ข้าวหอม ตอบว่า 8 เพราะสังเกตเห็นว่า จำนวนนับถัดไปเพิ่มขึ้นทีละ 2 จากจำนวนก่อนหน้า

ข้าวปั้น ตอบว่า 10 เพราะสังเกตเห็นว่า จำนวนนับถัดไปมาจากจำนวนก่อนหน้าสองจำนวนบวกกัน

ข้าวตู ตอบว่า 22 เพราะสังเกตเห็นว่า จำนวนนับถัดไปมาจากจำนวนก่อนหน้าสองจำนวนคูณกันแล้วลบออกด้วย 2

จะเห็นว่าข้อสรุปของแต่ละคนมาจากวิธีการคิดที่แตกต่างกัน และจำนวนข้อมูลที่นำมาเป็นข้อสังเกตหรือข้ออ้างอิงมีไม่เพียงพอต่อการสรุปความ

การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการนำความรู้พื้นฐาน ซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับแล้วว่าเป็นจริงมาประกอบ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปตามหลักเกณฑ์ของการให้เหตุผล เช่น จากข้อตกลง 1) และ 2)

1) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่

2) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ มีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากัน และไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก

เมื่อพิจารณาแล้วพบว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีสมบัติตามข้อ 1) ครบถ้วนจึงสรุปได้เป็นข้อ 3)

3) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เรียกข้อความหรือประโยคในข้อ 1) และ 2) ว่า **เหตุ** หรือ **สมมุติฐาน** เรียกข้อความหรือประโยคในข้อ 3) ว่า **ผล** และเรียกวิธีการสรุปข้อเท็จจริงซึ่งเป็นผลมาจากเหตุว่า **การให้เหตุผลแบบนิรนัย**

123 มุมคณิต

อาริสโตเติล (Aristotle, ประมาณ 384–322 ปีก่อนคริสต์ศักราช) เป็นนักปรัชญาชาวกรีกโบราณที่ได้รับการยกย่องให้เป็นหนึ่งในนักปรัชญาที่มีอิทธิพลสูงที่สุดท่านหนึ่งในโลกตะวันตก มีผลงานอยู่หลายศาสตร์ ซึ่งโลกยกย่องว่าเป็นผู้รอบรู้ในแทบทุกศาสตร์ในช่วงเวลานั้น

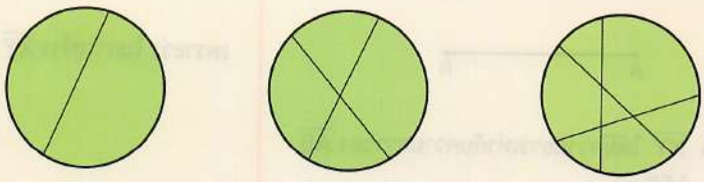
อาริสโตเติลได้รับการยกย่องให้เป็นบิดาของศาสตร์อย่างน้อยสองสาขา คือ ตรรกศาสตร์และสัตววิทยา ท่านได้กล่าวว่า มนุษย์เป็นสัตว์ที่รู้จักเหตุผล (Man is a rational animal.) โดยได้เขียนเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ไว้มากมาย เมื่อสิ้นชีวิตแล้ว สานุศิษย์จึงได้รวบรวมผลงานของท่านที่เกี่ยวกับการให้เหตุผลไว้เป็นหมวดหมู่ มีชื่อเรียกในภาษากรีกว่า Organon ซึ่งเป็นตำราค้นคว้าทางวิชาการ ผลงานชิ้นนี้จัดได้ว่าเป็นรากฐานของตรรกศาสตร์ของอาริสโตเติล

ชวนคิด 4.3

ข้าวปั้นชวนข้าวหอมทายเกม "แบ่งให้ได้หลายชิ้น" ดังนี้

1) ถ้าสร้างส่วนของเส้นตรง 1 เส้น แบ่งพื้นที่ของวงกลมหนึ่งวง จะแบ่งได้มากที่สุด 2 ชิ้น
2) ถ้าสร้างส่วนของเส้นตรง 2 เส้น แบ่งพื้นที่ของวงกลมหนึ่งวง จะแบ่งได้มากที่สุด 4 ชิ้น
3) ถ้าสร้างส่วนของเส้นตรง 3 เส้น แบ่งพื้นที่ของวงกลมหนึ่งวง จะแบ่งได้มากที่สุด 7 ชิ้น

ดังรูป



จำนวนชิ้นที่แบ่งได้มากที่สุด 2 4 7

ข้าวปั้นถามข้าวหอมว่า ถ้าสร้างส่วนของเส้นตรง 4 เส้น แบ่งพื้นที่ของวงกลมหนึ่งวง จะแบ่งได้มากที่สุดกี่ชิ้น และแบ่งได้อย่างไร

นักเรียนจะสร้างข้อความคาดการณ์เพื่อหาจำนวนชิ้นที่แบ่งได้มากที่สุดอย่างไร และมีวิธีแบ่งได้อย่างไร