Zadatak 041 (Trojac, gimnazija)

Odredite tjeme kvadratne funkcije $f(x) = 2 \cdot (x-5)^2 + 3.$

Rješenje 041

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot \left(x - x_0\right)^2 + y_0$ parabola je s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$ dobivena translacijom parabole $y = a \cdot x^2$. U točki x_0 funkcija f poprima najmanju vrijednost y_0 ako je a > 0, a najveću vrijednost y_0 ako je a < 0.

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$$

APSCISA TJEMENA — ORDINATA TJEMENA

$$T(x_0, y_0)$$

Primjeri:

- $f(x) = a \cdot (x-3)^2 + 5 \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-3)^2 + 5 \Rightarrow T(3, 5)$
- $f(x) = a \cdot (x-3)^2 - 5 \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-3)^2 + (-5) \Rightarrow T(3, -5)$
- $f(x) = a \cdot (x+3)^2 + 5 \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-(-3))^2 + 5 \Rightarrow T(-3, 5)$
- $f(x) = a \cdot (x+3)^2 - 5 \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-(-3))^2 + (-5) \Rightarrow T(-3, -5).$

Tjeme zadane funkcije $f(x) = 2 \cdot (x-5)^2 + 3,$ dakle, je: T(5, 3).

Vježba 041

Odredite tjeme kvadratne funkcije $f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 + 7.$

Rezultat: T(4, 7).

Zadatak 042 (2A, TUPŠ)

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x) = x^2 - (m-1) \cdot x - m, \; m \in R.$ Koji od polinoma ovog skupa prima najmanju vrijednost za x = – 2? Koliko ta vrijednost iznosi?

Rješenje 042

Ponovimo!

Kvadratna funkcija

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

ima ekstrem u točki s apscisom: $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$

Vrijednost ekstrema iznosi: $y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.

Odredimo koeficijente zadanog polinoma:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ f(x) = x^2 - (m-1) \cdot x - m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -(m-1) \\ c = -m \end{array} \right\}.$$

Tražimo m za koji polinom $f(x) = x^2 - (m-1) \cdot x - m$ poprima najmanju vrijednost u $x_0 = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-(m-1)\ ,\ c=-m \\ x_0=-\frac{b}{2\cdot a}\ ,\ x_0=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{b}{2\cdot a}=-2\ /\cdot(-2\cdot a) \Rightarrow b=4\cdot a \Rightarrow -(m-1)=4\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m+1=4 \Rightarrow -m=4-1 \Rightarrow -m=3\ /\cdot(-1) \Rightarrow m=-3.$$

Za taj m imamo polinom:

$$\left.\begin{array}{l} m=-3 \\ f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=x^2-(-3-1)\cdot x-(-3) \Rightarrow f(x)=x^2+4\cdot x+3.$$

Najmanja vrijednost (minimum) tog polinoma je:

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ f(x)=x^2+4\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)+3 \Rightarrow f(-2)=4-8+3 \Rightarrow f(-2)=-1.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+4\cdot x+3 \\ a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=3 \\ y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0=\frac{4\cdot 1\cdot 3-4^2}{4\cdot 1} \Rightarrow y_0=\frac{12-16}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0=\frac{-4}{4} \Rightarrow y_0=-1.$$

Vježba 042

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x)=x^2+(1-m)\cdot x-m,\ m\in R.$ Koji od polinoma ovog skupa prima najmanju vrijednost za x = – 2? Koliko ta vrijednost iznosi?

Rezultat: $f(x)=x^2+4\cdot x+3\quad ,\quad m=-3.$

Zadatak 043 (2A, TUPŠ)

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m,\ m\in R.$ Dokaži da svi polinomi imaju realne korijene.

Rješenje 043

Ponovimo!

$$(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\quad ,\quad (x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\quad ,\quad x^2\geq 0\ ,\ x\in R.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ je broj $D=b^2-4\cdot a\cdot c.$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena).
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen).
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja (korijene).

Da bi svi polinomi imali realne korijene mora vrijediti:

$$D\geq 0 \Rightarrow b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m \\ a=1\ ,\ b=-(m-1)\ ,\ c=-m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-(m-1)\ ,\ c=-m \\ b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-(m-1))^2-4\cdot 1\cdot(-m)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1)^2+4\cdot m\geq 0 \Rightarrow m^2-2\cdot m+1+4\cdot m\geq 0 \Rightarrow m^2+2\cdot m+1\geq 0 \Rightarrow (m+1)^2\geq 0.$$

Tvrdnja je točna.

Vježba 043

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x)=x^2+(1-m)\cdot x-m,\ m\in R.$ Dokaži da svi polinomi imaju realne korijene

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 044 (2A, TUPŠ)

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m,\ m\in R.$ Za koje se m dobije polinom s korijenima suprotnih predznaka?

Rješenje 044

Ponovimo!

Da bi korijeni polinoma $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ bili suprotnog predznaka nužno je i dovoljno da bude

$$a\cdot f(0)<0\ \Rightarrow\ a\cdot c<0.$$

Tako bi u ovom zadatku uvjet za m bio:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m \\ a=1\ ,\ c=-m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ c=-m \\ a\cdot c<0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1\cdot(-m)<0 \Rightarrow -m<0\ /\cdot(-1) \Rightarrow m>0.$$

Vježba 044

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x)=x^2+(1-m)\cdot x-m,\ m\in R.$ Za koje se m dobije polinom s korijenima suprotnih predznaka?

Rezultat: $m > 0.$

Zadatak 045 (2A, TUPŠ)

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m,\ m\in R.$ Odredi skup točaka ravnine što ga čine tjemena parabola koje su grafovi svih polinoma iz danog skupa.

Rješenje 045

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ je parabola koju dobivamo translacijom parabole $y=a\cdot x^2$, tako da joj tjeme bude u točki $T(x_0, y_0)$, pri čemu je

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}\quad ,\quad y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Pomoću koordinata tjemena postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-(m-1)\cdot x-m \\ a=1\ ,\ b=-(m-1)\ ,\ c=-m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{-(m-1)}{2\cdot 1} \\ y_0=\dfrac{4\cdot 1\cdot(-m)-(-(m-1))^2}{4\cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=\dfrac{m-1}{2} \\ y_0=\dfrac{-4\cdot m-(m-1)^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=\dfrac{m-1}{2} \\ y_0=\dfrac{-4\cdot m-\left(m^2-2\cdot m+1\right)}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=\dfrac{m-1}{2} \\ y_0=\dfrac{-4\cdot m-m^2+2\cdot m-1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{m-1}{2} \\ y_0 = \frac{-m^2 - 2\cdot m - 1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{m-1}{2} \\ y_0 = -\frac{m^2 + 2\cdot m + 1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{m-1}{2} \\ y_0 = -\frac{(m+1)^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{eliminiramo, isključimo} \\ \text{m iz dobivenog sustava} \end{array}\right] \Rightarrow$$

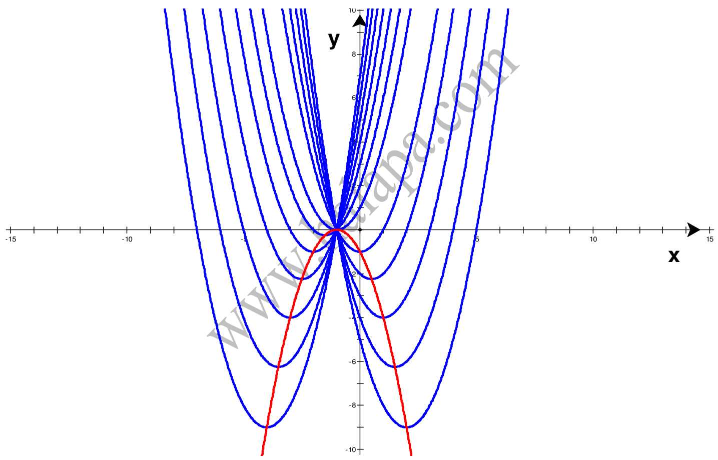
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{m-1}{2} \; / \cdot 2 \\ y_0 = -\frac{(m+1)^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x_0 = m-1 \\ y_0 = -\frac{(m+1)^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = 2\cdot x_0 + 1 \\ y_0 = -\frac{(m+1)^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = -\frac{(2\cdot x_0 + 1 + 1)^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{(2\cdot x_0 + 2)^2}{4} \Rightarrow y_0 = -\frac{(2\cdot (x_0 + 1))^2}{4} \Rightarrow y_0 = -\frac{4\cdot (x_0 + 1)^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{4\cdot (x_0 + 1)^2}{4} \Rightarrow y_0 = -(x_0 + 1)^2 .$$

Vidimo da je skup tjemena parabola koje su grafovi polinoma iz danog skupa također parabola

$$y = -(x+1)^2 .$$



Vježba 045

Dan je skup polinoma drugog stupnja: $f(x) = x^2 + (1-m)\cdot x - m,\ m \in R.$ Odredi skup točaka ravnine što ga čine tjemena parabola koje su grafovi svih polinoma iz danog skupa.

Rezultat: $y = -(x+1)^2 .$

Zadatak 046 (2A, TUPŠ)

Za koje vrijednosti realnog parametra m polinom II. stupnja: $f(x) = m\cdot x^2 - x - 1 - m$ ima korijene istog predznaka?

Rješenje 046

Ponovimo!

$$a\cdot b < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array}\right\} \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a < 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \quad , \quad \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array}\right\} \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a < 0 \\ b > 0 \end{array}\right\}.$$

$$a\cdot b > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array}\right\} \quad , \quad \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array}\right\}.$$

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

1.inačica

Nađemo korijene polinoma tako da riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot x^2 - x - 1 - m = 0 \\ a = m \;,\; b = -1 \;,\; c = -1 - m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = m \;,\; b = -1 \;,\; c = -1 - m \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot m \cdot (-1 - m)}}{2 \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot m + 4 \cdot m^2}}{2 \cdot m} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(1 + 2 \cdot m)^2}}{2 \cdot m} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm (1 + 2 \cdot m)}{2 \cdot m} \Rightarrow$$

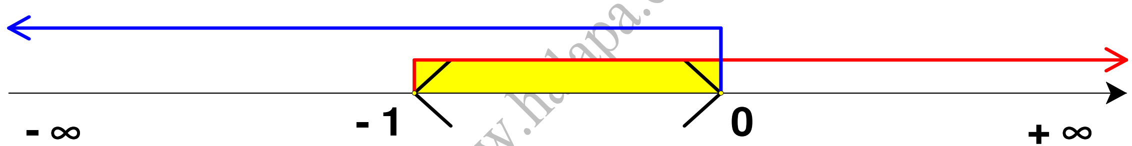
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1 + (1 + 2 \cdot m)}{2 \cdot m} \\ x_2 = \dfrac{1 - (1 + 2 \cdot m)}{2 \cdot m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1 + 1 + 2 \cdot m}{2 \cdot m} \\ x_2 = \dfrac{1 - 1 - 2 \cdot m}{2 \cdot m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2 + 2 \cdot m}{2 \cdot m} \\ x_2 = \dfrac{-2 \cdot m}{2 \cdot m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2 \cdot (1 + m)}{2 \cdot m} \\ x_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1 + m}{m} \\ x_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Drugo rješenje x_2 je negativno pa prvo rješenje x_1, zbog uvjeta zadatka, mora biti također negativno:

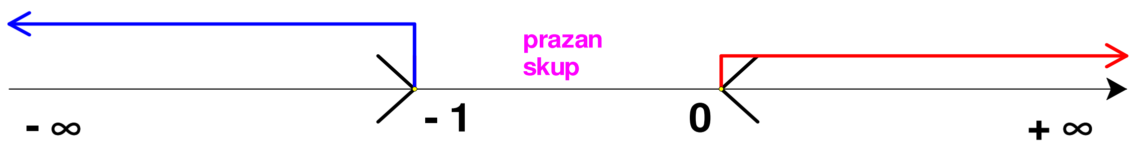
$$\frac{1 + m}{m} < 0.$$

Računamo vrijednosti parametra m:

- $\dfrac{1 + m}{m} < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + m > 0 \\ m < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m > -1 \\ m < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m \in \langle -1, 0 \rangle.$



- $\dfrac{1 + m}{m} < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + m < 0 \\ m > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varnothing$ prazan skup.



2.inačica

Uporabom druge Vièteove formule dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot x^2 - x - 1 - m = 0 \\ a = m \;,\; b = -1 \;,\; c = -1 - m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = m \;,\; b = -1 \;,\; c = -1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{-1 - m}{m}.$$

Budući da korijeni imaju iste predznake, slijedi:

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{-1 - m}{m} > 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{1 + m}{m} < 0.$$

Računamo vrijednosti parametra m:

- $\dfrac{1 + m}{m} < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + m > 0 \\ m < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m > -1 \\ m < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m \in \langle -1, 0 \rangle.$

- $\frac{1+m}{m} < 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1+m<0 \\ m>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} m<-1 \\ m>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varnothing$ prazan skup.

Vježba 046

Za koje vrijednosti realnog parametra m polinom II. stupnja: $f(x) = m \cdot x^2 - x - (1+m)$ ima korijene istog predznaka?

Rezultat: $m \in \langle -1, 0 \rangle$.

Zadatak 047 (2A, 2C, TUPŠ)

Odredi $b \in R$ tako da tjeme parabole y = – 3 · x^2 + b · x – 16 bude u točki T(– 2, – 4).

Rješenje 047

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ je parabola $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0. Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0. Koordinate tjemena T(x_0, y_0) su:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \quad , \quad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

1.inačica

Iz formule za apscisu (prvu koordinatu) tjemena T:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

dobije se koeficijent b.

$$\left.\begin{matrix} T(x_0, y_0) = T(-2, -4) \\ y = -3 \cdot x^2 + b \cdot x - 16 \\ a = -3 \;,\; b = b \;,\; c = -16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow -2 = -\frac{b}{2 \cdot (-3)} \Rightarrow -2 = \frac{b}{6} \; / \cdot 6 \Rightarrow b = -12.$$

2.inačica

Budući da točka T pripada paraboli, uvrstit ćemo vrijednosti koordinata tjemena T u jednadžbu parabole:

$$\left.\begin{matrix} T(x, y) = T(-2, -4) \\ y = -3 \cdot x^2 + b \cdot x - 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -4 = -3 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 16 \Rightarrow -4 = -3 \cdot 4 - 2 \cdot b - 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 = -12 - 2 \cdot b - 16 \Rightarrow 2 \cdot b = -12 - 16 + 4 \Rightarrow 2 \cdot b = -24 \; / : 2 \Rightarrow b = -12.$$

Vježba 047

Odredi $b \in R$ tako da tjeme parabole y = 2 · x^2 + b · x + 1 bude u točki T(1, – 1).

Rezultat: – 4.

Zadatak 048 (2A, 2C, TUPŠ)

Odredi $a \in R$ tako da tjeme parabole y = a · x^2 – x + 4 bude u točki $T\left(1, \frac{7}{2}\right)$.

Rješenje 048

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ je parabola $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0. Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0. Koordinate tjemena T(x_0, y_0) su:

$$x_0 = -\frac{b}{2\cdot a} \quad , \quad y_0 = \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}.$$

1.inačica

Iz formule za apscisu (prvu koordinatu) tjemena T:

$$x_0 = -\frac{b}{2\cdot a}.$$

dobije se koeficijent a.

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0, y_0\right) = T\left(1, \frac{7}{2}\right) \\ y = a\cdot x^2 - x + 4 \\ a = a \ , \ b = -1 \ , \ c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_0 = -\frac{b}{2\cdot a}\right] \Rightarrow 1 = -\frac{-1}{2\cdot a} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\cdot a} \Rightarrow 2\cdot a = 1 \ /:2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

2.inačica

Budući da točka T pripada paraboli, uvrstit ćemo vrijednosti koordinata tjemena T u jednadžbu parabole:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x, y\right) = T\left(1, \frac{7}{2}\right) \\ y = a\cdot x^2 - x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{2} = a\cdot 1^2 - 1 + 4 \Rightarrow \frac{7}{2} = a + 3 \Rightarrow a + 3 = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2} - 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Vježba 048

Odredi $a \in R$ tako da tjeme parabole $y = a \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$ bude u točki T(1, – 1)

Rezultat: 2.

Zadatak 049 (Marina, gimnazija)

Parabola $y = x^2 + a \cdot x + b$ ima isto tjeme kao parabola $y = -x^2 - 2 \cdot x - 2$. Izračunaj $a \cdot b$.

Rješenje 049

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ je parabola $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$. Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0. Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0. Koordinate tjemena T(x_0, y_0) su:

$$x_0 = -\frac{b}{2\cdot a} \quad , \quad y_0 = \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}.$$

Nađemo tjemena zadanih parabola.

- $$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + a\cdot x + b \\ a = 1 \ , \ b = a \ , \ c = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} T\left(x_0, y_0\right) \\ x_0 = -\frac{b}{2\cdot a} \ , \ y_0 = \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = -\frac{a}{2\cdot 1} \\ y_0 = \frac{4\cdot 1\cdot b - a^2}{4\cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = -\frac{a}{2} \\ y_0 = \frac{4\cdot b - a^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow T\left(-\frac{a}{2}, \frac{4\cdot b - a^2}{4}\right).$$

$$\bullet \quad \left.\begin{array}{l} y=-x^2-2\cdot x-2 \\ a=-1 \;,\; b=-2 \;,\; c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} T\left(x_0,\, y_0\right) \\ x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \;,\; y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{-2}{2\cdot(-1)} \\ y_0=\dfrac{4\cdot(-1)\cdot(-2)-(-2)^2}{4\cdot(-1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ y_0=\dfrac{8-4}{-4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ y_0=\dfrac{4}{-4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ y_0=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow T(-1,\,-1).$$

Budući da obje parabole imaju zajedničko, isto tjeme, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(-\dfrac{a}{2},\, \dfrac{4\cdot b-a^2}{4}\right) \\ T(-1,\,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{a}{2}=-1 \\ \dfrac{4\cdot b-a^2}{4}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{a}{2}=-1 \;/\cdot(-2) \\ \dfrac{4\cdot b-a^2}{4}=-1 \;/\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2 \\ 4\cdot b-a^2=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot b-2^2=-4 \Rightarrow 4\cdot b-4=-4 \Rightarrow 4\cdot b=-4+4 \Rightarrow 4\cdot b=0 \;/:4 \Rightarrow b=0.$$

Zato je

$$a\cdot b=2\cdot 0 \Rightarrow a\cdot b=0.$$

Vježba 049

Parabola $y = x^2 + a \cdot x + b$ ima isto tjeme kao parabola $y = -x^2 - 2 \cdot x - 2$. Izračunaj a + b.

Rezultat: 2.

Zadatak 050 (Dragan, gimnazija)

Zadana je funkcija $x^2 - 2 \cdot k \cdot x - 1 + 2 \cdot k^2 - y = 0$, gdje je k realan parametar. Nađi geometrijsko mjesto točaka minimuma funkcije kad se k mijenja.

Rješenje 050

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot\left(x-x_0\right)^2+y_0$ je parabola s tjemenom u točki $T\left(x_0,\, y_0\right)$. U točki x_0 funkcija f poprima najmanju vrijednost ako je a > 0, a najveću vrijednost ako je a < 0.
Kanonski oblik zadane funkcije glasi:

$$x^2-2\cdot k\cdot x-1+2\cdot k^2-y=0 \Rightarrow -y=-x^2+2\cdot k\cdot x+1-2\cdot k^2 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x^2-2\cdot k\cdot x-1+2\cdot k^2 \Rightarrow y=x^2-2\cdot k\cdot x-1+k^2+k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x^2-2\cdot k\cdot x+k^2+k^2-1 \Rightarrow y=\left(x^2-2\cdot k\cdot x+k^2\right)+k^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=(x-k)^2+k^2-1.$$

Koordinate tjemena T parabole iznose:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot\left(x-x_0\right)^2+y_0 \;,\; T\left(x_0,\, y_0\right) \\ f(x)=(x-k)^2+k^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow T\left(k,\, k^2-1\right).$$

Traženo geometrijsko mjesto točaka dobije se eliminiranjem parametra k iz sustava jednadžbi.

$$T(x,\ y)=T\left(k,\ k^2-1\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=k \\ y=k^2-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=k \ /^2 \\ y=k^2-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2=k^2 \\ y=k^2-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda zamjene,} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow y=x^2-1.$$

Traženo geometrijsko mjesto točaka je također parabola $y = x^2 - 1$.

Vježba 050

Zadana je funkcija $x^2 + 2 \cdot k^2 = y + 2 \cdot k \cdot x + 1$, gdje je k realan parametar. Nađi geometrijsko mjesto točaka minimuma funkcije kad se k mijenja.

Rezultat: $y = x^2 - 1$.

Zadatak 051 (4A, TUPŠ)

Putanja lopte opisana je funkcijom $h=-\frac{1}{100}\cdot x^2+\frac{2}{5}\cdot x+1$, gdje je h visina lopte iznad zemlje, a x horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja. Veličine h i x izražene su u metrima. Nađi visinu najvišeg položaja lopte iznad zemlje.

Rješenje 051

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadratna funkcija (čiji je graf parabola)

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

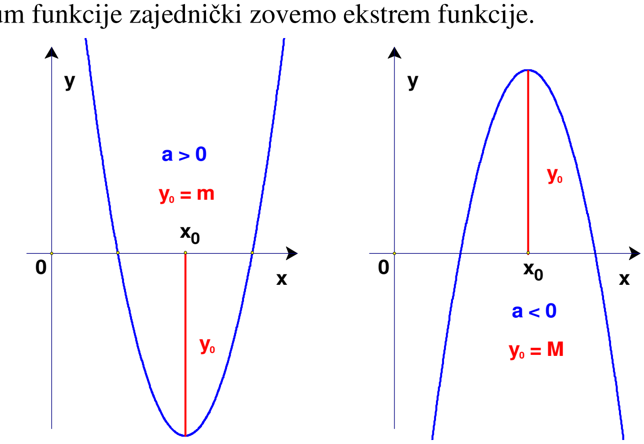
postiže minimum m ako je a > 0, a maksimum M ako je a < 0. Minimum (ili maksimum) je u točki

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a},$$

a njegova vrijednost iznosi

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Minimum i maksimum funkcije zajednički zovemo ekstrem funkcije.



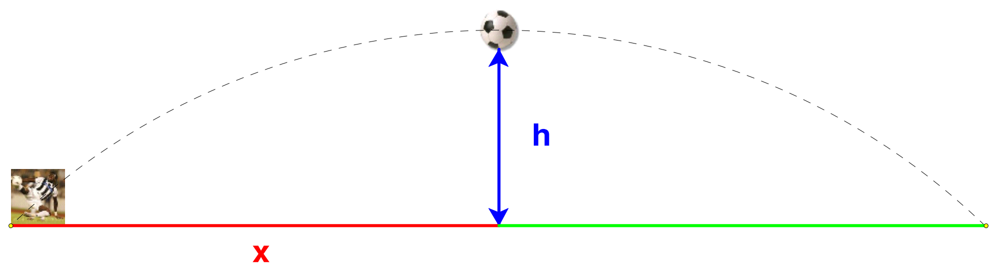
$$y=-\frac{1}{100}\cdot x^2+\frac{2}{5}\cdot x+1 \Rightarrow a=-\frac{1}{100} \ , \ b=\frac{2}{5} \ , \ c=1.$$

Budući da je koeficijent a negativan, znači da je graf funkcije parabola s otvorom prema dolje. Ekstrem funkcije bit će maksimum. Po formuli nalazimo maksimum:

$$\left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{100}\ ,\ b=\frac{2}{5}\ ,\ c=1 \\ h=y_0 \\ y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{100}\ ,\ b=\frac{2}{5}\ ,\ c=1 \\ h=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow h=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)\cdot 1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{-\frac{1}{25}-\frac{4}{25}}{-\frac{1}{25}} \Rightarrow h=\frac{-\frac{5}{25}}{-\frac{1}{25}} \Rightarrow h=\frac{\frac{5}{25}}{\frac{1}{25}} \Rightarrow h=\frac{5}{1} \Rightarrow h=5\ m.$$

Visina najvišeg položaja lopte iznad zemlje je 5 m.



Vježba 051

Putanja lopte opisana je funkcijom $h=-0.01\cdot x^2+0.4\cdot x+1$, gdje je h visina lopte iznad zemlje, a x horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja. Veličine h i x izražene su u metrima. Nađi visinu najvišeg položaja lopte iznad zemlje.

Rezultat: 5 m.

Zadatak 052 (Marina, srednja škola)

Koliki su koeficijenti kvadratne funkcije prikazane na slici?

Rješenje 052

Ponovimo!

Funkcija zadana formulom:

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c\ ,\ a,b,c\in R\ ,\ a\neq 0$$

zove se kvadratna funkcija ili kvadratni polinom. Za broj a kažemo da je vodeći koeficijent, b je linearni, a c slobodni koeficijent kvadratne funkcije. Graf kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ je parabola $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi

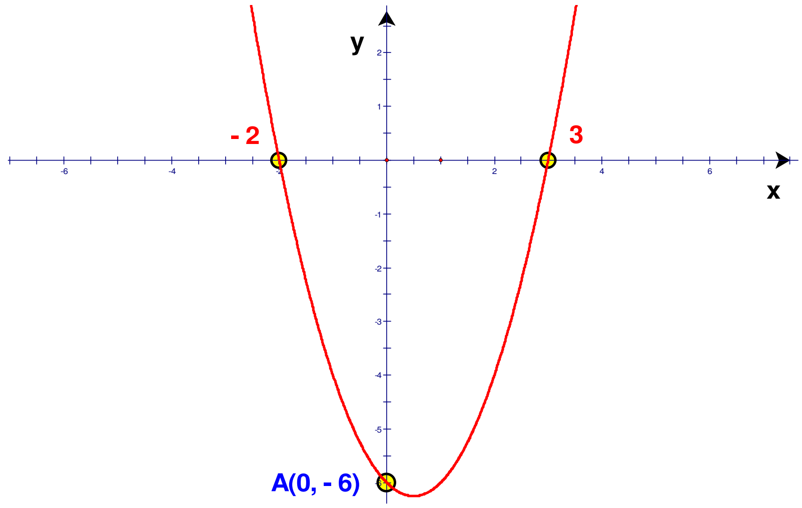
$$f(x_0)=0.$$

Realna nultočka funkcije apscisa je točke u kojoj graf funkcije siječe (ili dira) x – os. Grafički nultočke određujemo tako da nacrtamo parabolu

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

i odredimo točke na x – osi u kojima parabola siječe (ili dira) x – os. Ako su poznate nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije, tada se ona može faktorizirati

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ x_1,\ x_2-\text{nultočke funkcije} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$



Budući da su nultočke (korijeni) prikazane kvadratne funkcije brojevi $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$, funkciju možemo zapisati u obliku

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ x_1 = -2 \;,\; x_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 3) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot \left(x^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot x - 6\right) \Rightarrow f(x) = a \cdot \left(x^2 - x - 6\right).$$

Točka A(0, – 6) pripada grafu funkcije pa njezine koordinate uvrstimo u zadanu jednadžbu i odredimo koeficijent a:

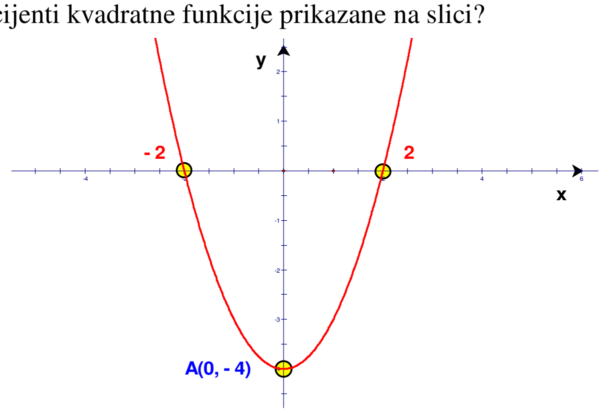
$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y) = A(0,\ -6) \\ y = a \cdot \left(x^2 - x - 6\right) \end{array}\right\} \Rightarrow -6 = a \cdot \left(0^2 - 0 - 6\right) \Rightarrow -6 = a \cdot (-6) \Rightarrow 6 \cdot a = 6 \;/:6 \Rightarrow a = 1.$$

Znači da funkcija i koeficijenti glase:

$$f(x) = 1 \cdot \left(x^2 - x - 6\right) \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow f(x) = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 6 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{array}\right\}.$$

Vježba 052

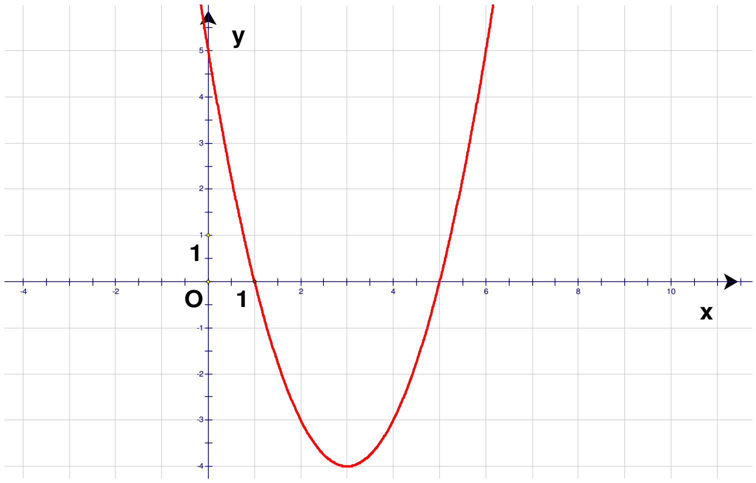
Koliki su koeficijenti kvadratne funkcije prikazane na slici?



Rezultat: $f(x) = x^2 - 4$, $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$.

Zadatak 053 (Ekipa, TUPŠ)

Koju funkciju prikazuje sljedeći graf?



$A.\ f(x)=(x+3)^2+4 \quad B.\ f(x)=(x+3)^2-4 \quad C.\ f(x)=(x-3)^2+4 \quad D.\ f(x)=(x-3)^2-4$

Rješenje 053

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije zadane formulom

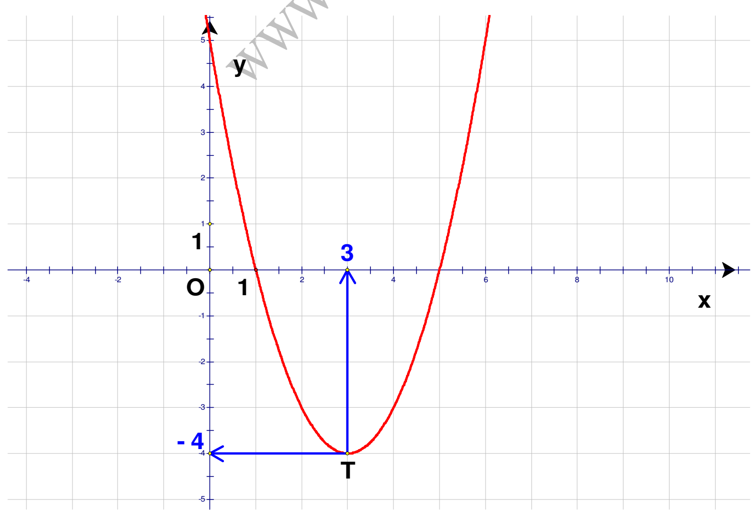
$$f(x)=a\cdot(x-x_0)^2+y_0\ ,\ a\neq 0$$

parabola je s tjemenom u točki

$$T(x_0,\ y_0).$$

U točki x_0 funkcija poprima najmanju vrijednost y_0 ako je a > 0, a najveću vrijednost y_0 ako je a < 0.

1.inačica



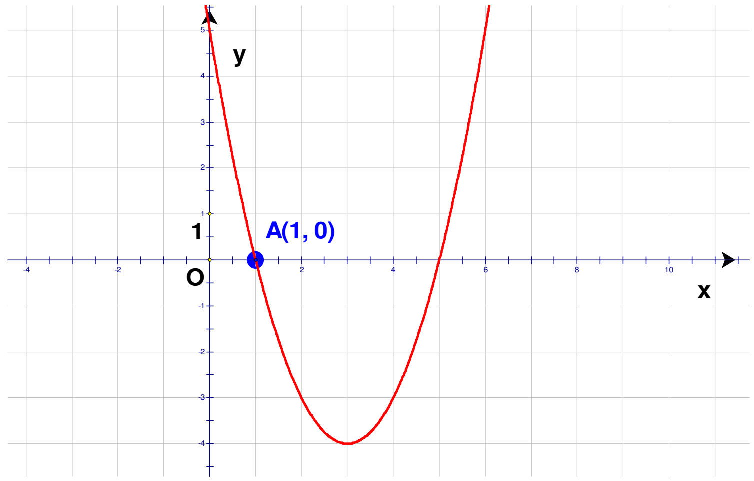
Sa slike odredimo koordinate tjemena parabole T(3, – 4).

Jednadžba parabole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0,\ y_0)=T(3,\ -4) \\ f(x)=a\cdot(x-x_0)^2+y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-3)^2-4 \Rightarrow [\,a=1\,] \Rightarrow f(x)=(x-3)^2-4.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica



Sa slike odredimo koordinate jedne točke koja pripada paraboli. Na primjer, točka A(1, 0).
Koordinate točke redom uvrštavamo u ponuđene odgovore A, B, C i D.

Odgovor A.

$$\left.\begin{matrix} A(x,\ f(x)) = A(1,\ 0) \\ f(x) = (x+3)^2 + 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = (1+3)^2 + 4 \Rightarrow 0 = 4^2 + 4 \Rightarrow 0 = 16 + 4 \Rightarrow 0 = 20 \ \text{nije točno}$$

Odgovor B.

$$\left.\begin{matrix} A(x,\ f(x)) = A(1,\ 0) \\ f(x) = (x+3)^2 - 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = (1+3)^2 - 4 \Rightarrow 0 = 4^2 - 4 \Rightarrow 0 = 16 - 4 \Rightarrow 0 = 12 \ \text{nije točno}$$

Odgovor C.

$$\left.\begin{matrix} A(x,\ f(x)) = A(1,\ 0) \\ f(x) = (x-3)^2 + 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = (1-3)^2 + 4 \Rightarrow 0 = (-2)^2 + 4 \Rightarrow 0 = 4 + 4 \Rightarrow 0 = 8 \ \text{nije točno}$$

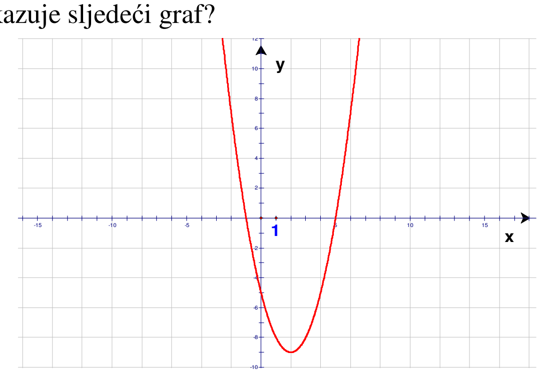
Odgovor D.

$$\left.\begin{matrix} A(x,\ f(x)) = A(1,\ 0) \\ f(x) = (x-3)^2 - 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = (1-3)^2 - 4 \Rightarrow 0 = (-2)^2 - 4 \Rightarrow 0 = 4 - 4 \Rightarrow 0 = 0 \ \text{točno je}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 053

Koju funkciju prikazuje sljedeći graf?

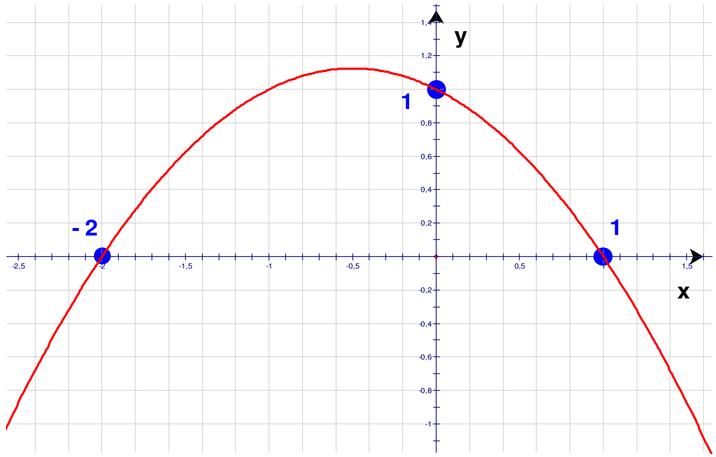


A. $f(x) = (x+2)^2 + 9$ B. $f(x) = (x+2)^2 - 9$ C. $f(x) = (x-2)^2 + 9$ D. $f(x) = (x-2)^2 - 9$

Rezultat: Odgovor je pod D.

Zadatak 054 (Nikola, srednja škola)

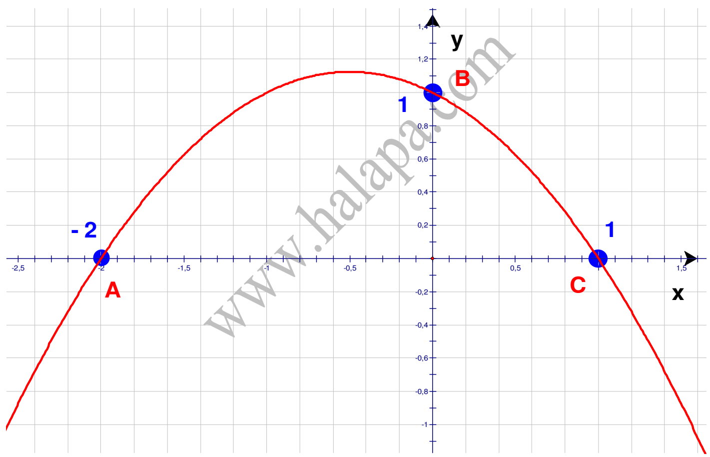
Odredite koeficijente a, b, c kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ čiji je graf prikazan na slici.



Rješenje 054

Uočimo točke u kojima parabola (graf kvadratne funkcije) siječe x i y os. Njihove koordinate glase:

$$A(-2, 0) \quad , \quad B(0, 1) \quad , \quad C(1, 0).$$



Koordinate svake točke uvrstimo u jednadžbu parabole (graf kvadratne funkcije).

- $$\left.\begin{array}{l} A(x, f(x)) = A(-2, 0) \\ f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Rightarrow 4 \cdot a - 2 \cdot b + c = 0.$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x, f(x)) = B(0, 1) \\ f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1.$$

- $$\left.\begin{array}{l} C(x, f(x)) = C(1, 0) \\ f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0.$$

Iz sustava od tri linearne jednadžbe sa tri nepoznanice dobiju se koeficijenti a, b i c.

$$\left.\begin{array}{r} 4 \cdot a - 2 \cdot b + c = 0 \\ c = 1 \\ a + b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4 \cdot a - 2 \cdot b + 1 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4 \cdot a - 2 \cdot b = -1 \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\cdot a-2\cdot b=-1 \\ a+b\ =-1\ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\cdot a-2\cdot b=-1 \\ 2\cdot a+2\cdot b\ =-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6\cdot a=-3\ /:6 \Rightarrow$$

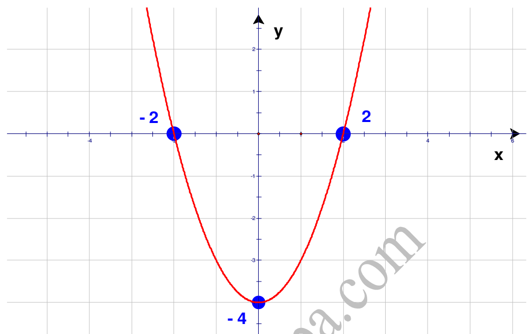
$$\Rightarrow a=-\frac{3}{6} \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2}+b=-1 \Rightarrow b=-1+\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}.$$

Kvadratna funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}\ ,\ c=1 \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+1.$$

Vježba 054

Odredite koeficijente a, b, c kvadratne funkcije f(x) = a · x^2 + b · x + c čiji je graf prikazan na slici.



Rezultat: $f(x)=x^2-4.$

Zadatak 055 (XY, gimnazija)

Projektil je koso ispaljen iz točke na nadmorskoj visini od 50 m i giba se po paraboli. Nakon 2 km postiže nadmorsku visinu od 610 m. Nakon sljedeća 2 km nalazi se na nadmorskoj visini od 530 m. U trenutku kada projektil dostiže svoju maksimalnu visinu, 500 m iznad njega leti helikopter. Na kojoj se nadmorskoj visini u tom trenutku nalazi helikopter?

Rješenje 055

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Kvadratna funkcija

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.

Budući da se projektil giba po paraboli, uočimo tri točke parabole za koje su poznate koordinate. Sve koordinate izrazit ćemo u kilometrima. Uvedemo koordinatni sustav tako da točka A ima koordinate A(0, 0.05) jer projektil nije ispaljen sa površine zemlje nego iz točke na nadmorskoj visini od

$$50 \text{ m} = 0.05 \text{ km}.$$

Točka B ima koordinate B(2, 0.61) jer nakon 2 km od ispaljivanja projektil postiže nadmorsku visinu od

$$610 \text{ m} = 0.61 \text{ km}.$$

Točka C ima koordinate C(4, 0.53) jer nakon sljedeća 2 km, tj. nakon ukupno 4 km od ispaljivanja projektil postiže nadmorsku visinu od

$$530 \text{ m} = 0.53 \text{ km}.$$

Koordinate svake točka: A, B i C uvrstimo u jednadžbu parabole

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \text{ tj.}$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y.$$

Točka A

$$\left.\begin{array}{l} A(x, y) = A(0, 0.05) \\ a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0.05 \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0.05 \Rightarrow c = 0.05.$$

Točka B

$$\left.\begin{array}{l} B(x, y) = B(2, 0.61) \\ a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0.61 \Rightarrow 4 \cdot a + 2 \cdot b + c = 0.61.$$

Točka C

$$\left.\begin{array}{l} C(x, y) = C(4, 0.53) \\ a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0.53 \Rightarrow 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 0.53.$$

Dobili smo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice. Iz sustava jednadžbi izračunamo koeficijente a, b i c.

$$\left.\begin{array}{l} c = 0.05 \\ 4 \cdot a + 2 \cdot b + c = 0.61 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 0.53 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a + 2 \cdot b + 0.05 = 0.61 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b + 0.05 = 0.53 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0.61 - 0.05 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b = 0.53 - 0.05 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0.56 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b = 0.48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0.56 \\ 16 \cdot a + 4 \cdot b = 0.48 \;/:(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0.56 \\ -8 \cdot a - 4 \cdot b = -0.24 \end{array}\right\} \Rightarrow -4 \cdot a = 0.32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot a = 0.32 \;/:(-4) \Rightarrow a = -0.08.$$

Računamo koeficijent b.

$$\left.\begin{array}{l} a = -0.08 \\ 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0.56 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot (-0.08) + 2 \cdot b = 0.56 \Rightarrow -0.32 + 2 \cdot b = 0.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot b = 0.56 + 0.32 \Rightarrow 2 \cdot b = 0.88 \Rightarrow 2 \cdot b = 0.88 \;/:2 \Rightarrow b = 0.44.$$

Budući da se maksimalna visina y_0 računa po formuli

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a},$$

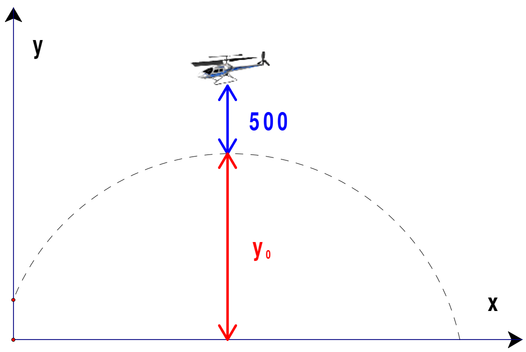
slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a=-0.08 \;\;,\;\; b=0.44 \;\;,\;\; c=0.05 \\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0=\frac{4\cdot(-0.08)\cdot 0.05-0.44^2}{4\cdot(-0.08)} \Rightarrow y_0=0.655 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0=0.655\ km \Rightarrow y_0=655\ m.$$

Helikopter se nalazi na visini od

655 m + 500 m = 1155 m.



Vježba 055

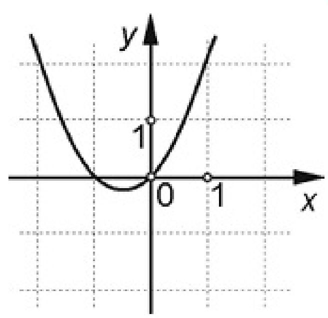
Projektil je koso ispaljen iz točke na nadmorskoj visini od 50 m i giba se po paraboli. Nakon 2 km postiže nadmorsku visinu od 610 m. Nakon sljedeća 2 km nalazi se na nadmorskoj visini od 530 m. U trenutku kada projektil dostiže svoju maksimalnu visinu, 445 m iznad njega leti helikopter. Na kojoj se nadmorskoj visini u tom trenutku nalazi helikopter?

Rezultat: 1100 m.

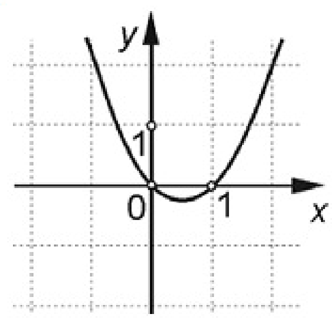
Zadatak 056 (Vedrana, gimnazija)

Koja slika prikazuje graf funkcije $f(x) = -x^2 - x$?

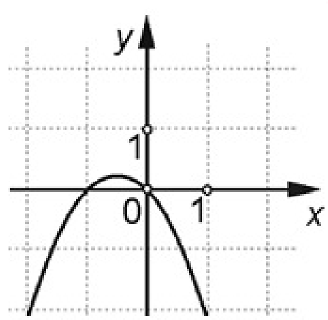
A.



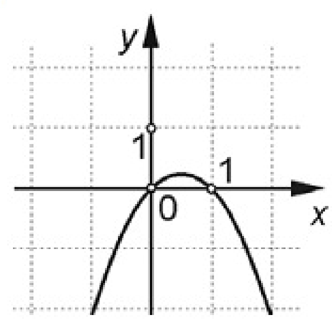
C.



B.



D.



Rješenje 056

Ponovimo!

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \;\text{ ili }\; b = 0 \;\text{ ili }\; a = b = 0.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \; a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.
Točke u kojima graf funkcije siječe os apscisa imaju ordinatu jednaku nuli (y = 0).
Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (y = 0). Vrijednost x za koju je f(x) = 0 zove se nulište funkcije. Najčešće se za oba pojma rabi izraz nultočka.
Određujemo otvorenost parabole

$$y = -x^2 - x.$$

$$\left.\begin{array}{l} y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ y = -x^2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -x^2 - x \\ a = -1 \;,\; b = -1 \;,\; c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1 < 0 \Rightarrow \text{parabola otvorena prema dolje}.$$

Određujemo nultočke kvadratne funkcije

$$f(x) = -x^2 - x.$$

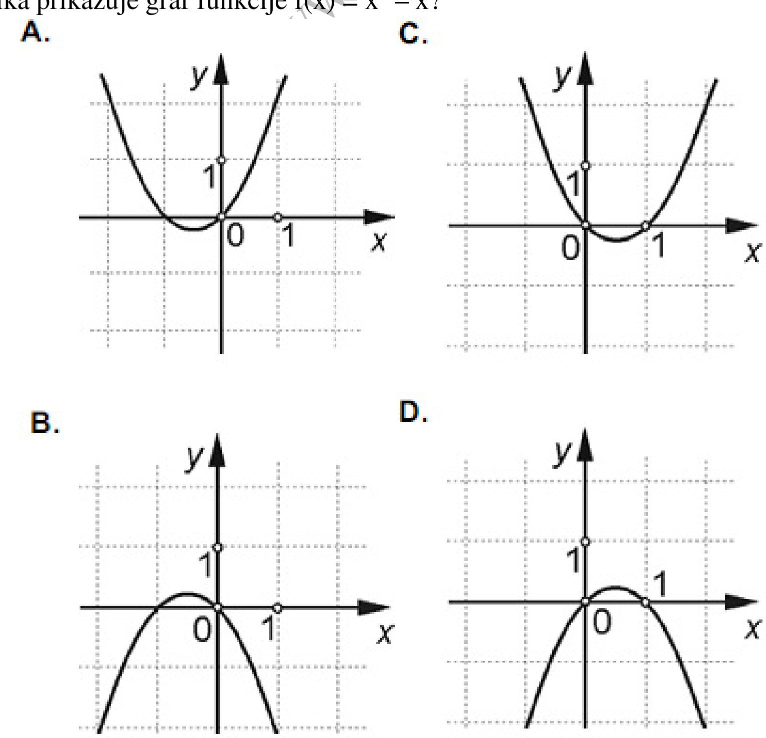
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - x = 0 \Rightarrow -x^2 - x = 0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{nultočke}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 056

Koja slika prikazuje graf funkcije f(x) = x^2 – x?

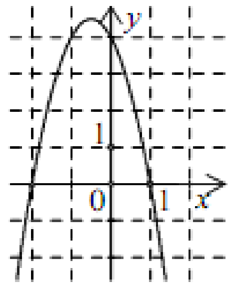


Rezultat: C.

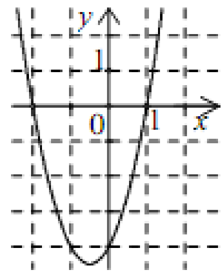
Zadatak 057 (Vedrana, gimnazija)

Koja slika prikazuje graf funkcije f(x) = – 2 · (x + 2) · (x – 1)?

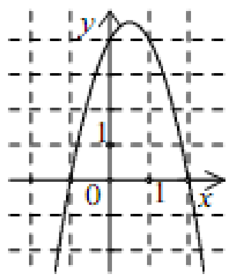
A.



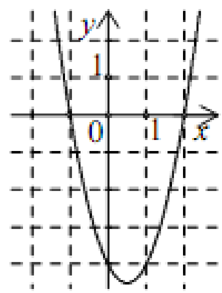
C.



B.



D.



Rješenje 057

Ponovimo!

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\; a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.
Točke u kojima graf funkcije siječe os apscisa imaju ordinatu jednaku nuli (y = 0).
Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (y = 0). Vrijednost x za koju je f(x) = 0 zove se nulište funkcije. Najčešće se za oba pojma rabi izraz nultočka.

Faktorizacija kvadratnog trinoma

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

Određujemo otvorenost parabole

$$y = -2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} y = a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) \\ y = -2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \\ a = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -2 < 0 \Rightarrow \text{parabola otvorena prema dolje.}$$

Određujemo nultočke kvadratne funkcije

$$f(x) = -2 \cdot (x+2) \cdot (x-1).$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x+2) \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x+2) \cdot (x-1) = 0 \;/ : (-2) \Rightarrow (x+2) \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow$$

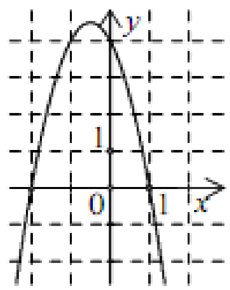
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2=0 \\ x-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{array} \right\} \text{ nultočke.}$$

Odgovor je pod A.

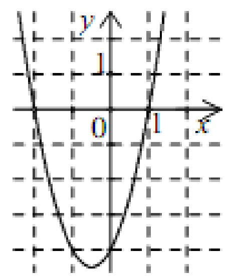
Vježba 057

Koja slika prikazuje graf funkcije f(x) = 2 · (x + 2) · (x – 1)?

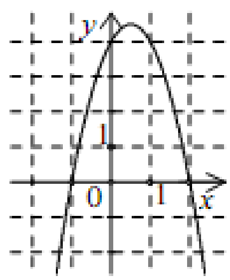
A.



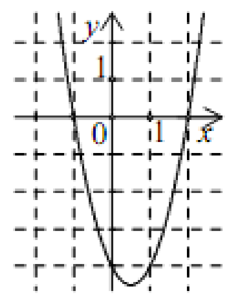
C.



B.



D.



Rezultat: C.

Zadatak 058 (Franjo, srednja škola)

Najveća vrijednost polinoma drugog stupnja jednaka je $\frac{13}{8}$. Također vrijedi f(– 1) = f(2) = 1.

Koji je to polinom?

Rješenje 058

Ponovimo!

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ili } y = 0 \text{ ili } x = y = 0.$$

$$\frac{x}{y} + \frac{m}{n} = \frac{x \cdot n + y \cdot m}{y \cdot n} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c\ ,\ a\neq 0$$

ima ekstrem u točki s apscisom:

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.

Graf kvadratne funkcije (polinoma drugog stupnja) $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Parabola je simetrična s obzirom na pravac koji je usporedan (paralelan) s osi y i prolazi tjemenom parabole. Jednadžba je tog pravca $x = x_0$. To znači da iz jednakosti

$$f(x_1)=f(x_2)$$

slijedi da je apscisa tjemena parabole x_0 polovište zbroja apscisa x_1 i x_2.

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

1.inačica

Prema uvjetima iz zadatka dobije se sustav od tri jednadžbe sa tri.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1\\ f(2)=1\\ y_0=\dfrac{13}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c\\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=1\\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=1\\ \dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=\dfrac{13}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a-b+c=1\\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1\\ \dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=\dfrac{13}{8}\ /\cdot 8\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a-b+c=1\\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1\\ 2\cdot\left(4\cdot a\cdot c-b^2\right)=13\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a-b+c=1\\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1\\ 8\cdot a\cdot c-2\cdot b^2=13\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{iz prve jednadžbe izračunamo}\\ \text{nepoznanicu c i uvrstimo u}\\ \text{druge dvije jednadžbe}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l} c=1-a+b\\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1\\ 8\cdot a\cdot c-2\cdot b^2=13\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+1-a+b=1\\ 8\cdot a\cdot(1-a+b)-2\cdot b^2=13\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+1-a+b=1\\ 8\cdot a-8\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-2\cdot b^2=13\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0\\ 8\cdot a-8\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-2\cdot b^2-13\cdot a=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0\ /:3\\ -5\cdot a-8\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-2\cdot b^2=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a+b=0\\ -5\cdot a-8\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-2\cdot b^2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} b=-a\\ -5\cdot a-8\cdot a^2+8\cdot a\cdot b-2\cdot b^2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -5\cdot a-8\cdot a^{2}+8\cdot a\cdot(-a)-2\cdot(-a)^{2}=0\ \Rightarrow\ -5\cdot a-8\cdot a^{2}-8\cdot a^{2}-2\cdot a^{2}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -18\cdot a^{2}-5\cdot a=0\ \Rightarrow\ -18\cdot a^{2}-5\cdot a=0\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ 18\cdot a^{2}+5\cdot a=0\ \Rightarrow\ a\cdot(18\cdot a+5)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=0\ \text{nema smisla} \\ 18\cdot a+5=0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 18\cdot a=-5\ \Rightarrow\ 18\cdot a=-5\ /:18\ \Rightarrow\ a=-\frac{5}{18}.$$

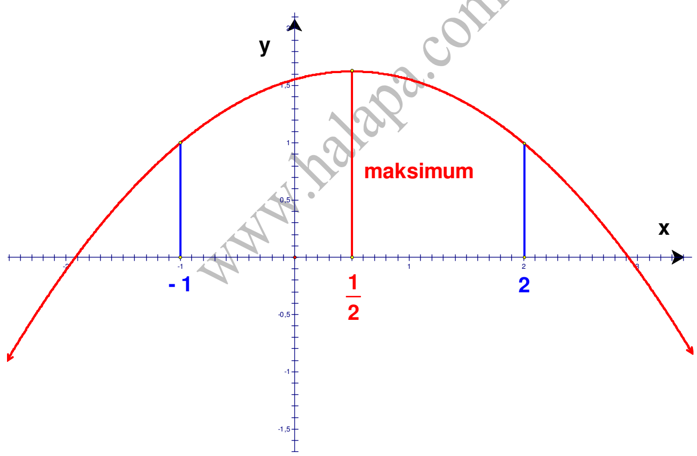
Računamo koeficijente b i c polinoma drugog stupnja (kvadratne funkcije).

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b=-a \\ c=1-a+b \\ a=-\frac{5}{18} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b=-\left(-\frac{5}{18}\right) \\ c=1-\left(-\frac{5}{18}\right)+b \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b=\frac{5}{18} \\ c=1+\frac{5}{18}+b \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ c=1+\frac{5}{18}+\frac{5}{18}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c=\frac{1}{1}+\frac{5}{18}+\frac{5}{18}\ \Rightarrow\ c=\frac{18+5+5}{18}\ \Rightarrow\ c=\frac{28}{18}\ \Rightarrow\ c=\frac{14}{9}.$$

Polinom drugog stupnja glasi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \\ a=-\frac{5}{18}\ ,\ b=\frac{5}{18}\ ,\ c=\frac{14}{9} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{5}{18}\cdot x^{2}+\frac{5}{18}\cdot x+\frac{14}{9}.$$



2.inačica

Iskoristit ćemo svojstvo simetrije grafa polinoma drugog stupnja. Budući da je f(– 1) = f(2), slijedi da je apscisa tjemena parabole (najveće vrijednosti polinoma) polovište apscisa $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$:

$$x_0=\frac{-1+2}{2}\ \Rightarrow\ x_0=-\frac{1}{2}.$$

Riješimo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1 \\ f(2)=1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{8} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c\right]\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a\cdot(-1)^{2}+b\cdot(-1)+c=1 \\ a\cdot 2^{2}+b\cdot 2+c=1 \\ a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+b\cdot\frac{1}{2}+c=\frac{13}{8} \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=1 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1 \\ \frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+c=\frac{13}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=1 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1 \\ \frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+c=\frac{13}{8} \ /\cdot 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=1 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1 \\ 2\cdot a+4\cdot b+8\cdot c=13 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz prve jednadžbe izračunamo} \\ \text{nepoznanicu c i uvrstimo} \\ \text{u druge dvije jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=1-a+b \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=1 \\ 2\cdot a+4\cdot b+8\cdot c=13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+1-a+b=1 \\ 2\cdot a+4\cdot b+8\cdot(1-a+b)=13 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+1-a+b=1 \\ 2\cdot a+4\cdot b+8-8\cdot a+8\cdot b=13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0 \\ -6\cdot a+12\cdot b=13-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0 \ /:3 \\ -6\cdot a+12\cdot b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ -6\cdot a+12\cdot b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a \\ -6\cdot a+12\cdot b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow -6\cdot a+12\cdot(-a)=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\cdot a-12\cdot a=5 \Rightarrow -18\cdot a=5 \Rightarrow -18\cdot a=5 \ /:(-18) \Rightarrow a=-\frac{5}{18}.$$

Računamo koeficijente b i c polinoma drugog stupnja (kvadratne funkcije).

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a \\ c=1-a+b \\ a=-\frac{5}{18} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-\left(-\frac{5}{18}\right) \\ c=1-\left(-\frac{5}{18}\right)+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\frac{5}{18} \\ c=1+\frac{5}{18}+b \end{array}\right\} \Rightarrow c=1+\frac{5}{18}+\frac{5}{18} \Rightarrow$$

Polinom drugog stupnja glasi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ a=-\frac{5}{18}\ ,\ b=\frac{5}{18}\ ,\ c=\frac{14}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-\frac{5}{18}\cdot x^2+\frac{5}{18}\cdot x+\frac{14}{9}.$$

Vježba 058

Najveća vrijednost polinoma drugog stupnja jednaka je 3. Također vrijedi f(– 1) = f(2) = 0. Koji je to polinom?

Rezultat: $f(x)=-\frac{4}{3}\cdot x^2+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{8}{3}.$

Zadatak 059 (Matea, gimnazija)

Sa 200 metara žice treba ograditi zemljište pravokutnog oblika što je moguće veće površine. Koliko iznosi duljina i širina zemljišta?

Rješenje 059

Ponovimo!

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Opseg i površina pravokutnika

Opseg je zbroj duljina svih stranica pravokutnika

$$O=2\cdot(a+b).$$

Površina pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P=a\cdot b.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a $\neq$ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \;,\; a \neq 0$$

ima ekstrem u točki s apscisom:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Označimo slovima x i y duljinu i širinu pravokutnika. Budući da je žica duga 200 metara, dobije se:

- $$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot (x+y) \\ O = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot (x+y) = 200 \Rightarrow 2 \cdot (x+y) = 200 \;/ : 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x.$$
- $$\left.\begin{array}{l} P = x \cdot y \\ y = 100 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow P = x \cdot (100 - x) \Rightarrow P = 100 \cdot x - x^2 \Rightarrow P = -x^2 + 100 \cdot x.$$

Površina pravokutnika izražena je pomoću kvadratne funkcije.

$$P(x) = -x^2 + 100 \cdot x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(x) = -x^2 + 100 \cdot x \\ a = -1 \;,\; b = 100 \;,\; c = 0 \end{array}\right\}.$$

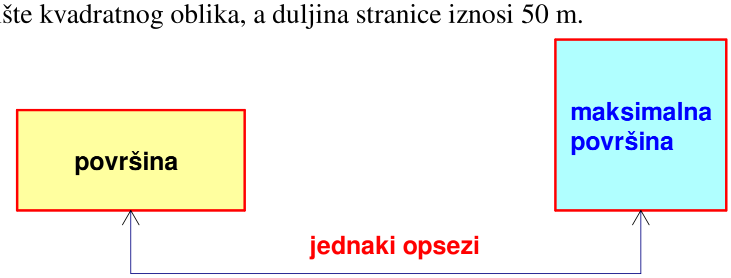
Budući da je vodeći koeficijent kvadratne funkcije P(x) negativan (a = – 1 < 0), funkcija ima najveću vrijednost za:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \\ a = -1 \;,\; b = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 50.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} y = 100 - x \\ x = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 100 - 50 \Rightarrow y = 50.$$

Znači da je zemljište kvadratnog oblika, a duljina stranice iznosi 50 m.



Vježba 059

Sa 100 metara žice treba ograditi zemljište pravokutnog oblika što je moguće veće površine. Koliko iznosi duljina i širina zemljišta?

Rezultat: 25 m.

Zadatak 060 (Matea, gimnazija)

Luk mosta ima oblik parabole $y=-\frac{1}{80}\cdot x^{2}+c.$ Kolika je duljina mosta ako je visina luka 5 m?

Rješenje 060

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c\ ,\ a\neq 0$$

ima ekstrem u točki s apscisom:

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^{2}}{4\cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Graf kvadratne funkcije (polinoma drugog stupnja) $f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c$ je parabola

$$y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c.$$

Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (y = 0). Vrijednost x za koju je f(x) = 0 zove se nulište funkcije. Najčešće se za oba pojma rabi izraz nultočka.
Nultočke kvadratne funkcije dobijemo tako da riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$a\cdot x^{2}+b\cdot x+c=0.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

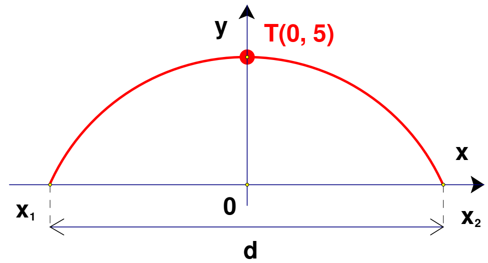
Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Ili ovako:
Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 7 | = 7.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 4 | = – (– 4) = 4.
Neka su A(x_1) i B(x_2) dvije točke brojevnog pravca. Tada je udaljenost dviju točaka jednaka

$$|AB|=|x_2-x_1|.$$

Postavimo most u pravokutni koordinatni sustav kao na slici. Visina luka mosta je ordinata tjemena T(0, 5) parabole. Uvrstimo koordinate tjemena u jednadžbu parabole da bismo izračunali slobodni koeficijent c.



$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y) = T(0,\ 5) \\ y = -\frac{1}{80}\cdot x^2 + c \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = -\frac{1}{80}\cdot 0^2 + c \Rightarrow 5 = 0 + c \Rightarrow c = 5.$$

Tada jednadžba parabole glasi:

$$y = -\frac{1}{80}\cdot x^2 + 5.$$

Nultočke parabole dobijemo kao rješenje kvadratne jednadžbe.

$$-\frac{1}{80}\cdot x^2 + 5 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{80}\cdot x^2 = -5 \Rightarrow -\frac{1}{80}\cdot x^2 = -5 \ /\cdot(-80) \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 400 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{400} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -20 \\ x_2 = 20 \end{array}\right\}.$$

Duljina mosta iznosi:

$$d = \left|x_2 - x_1\right| \Rightarrow d = \left|20 - (-20)\right| \Rightarrow d = \left|20 + 20\right| \Rightarrow d = \left|40\right| \Rightarrow d = 40\ m.$$

Vježba 060

Luk mosta ima oblik parabole $y = -\frac{1}{20}\cdot x^2 + c.$ Kolika je duljina mosta ako je visina luka 5 m?

Rezultat: 20 m.