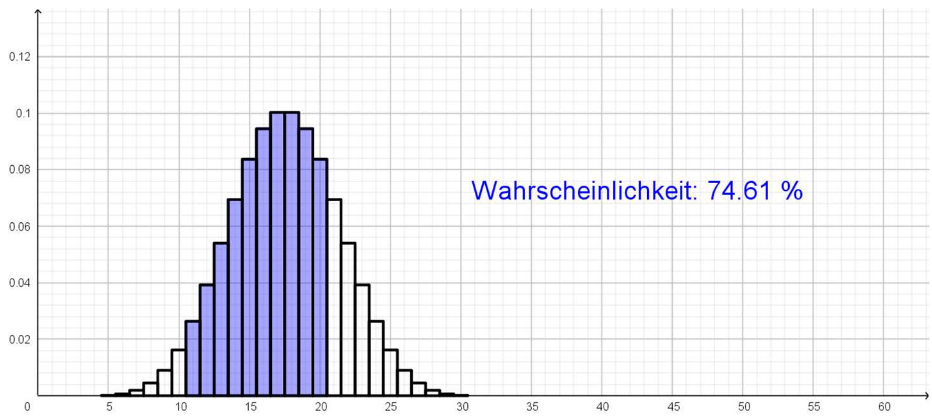
Wahrscheinlichkeiten der Augensummen beim Wurf mit n Würfeln

Gesucht sind (*geordnete*) Summen natürlicher Zahlen mit vorgegebenen Werten A und Anzahlen n ihrer Summanden. Der erste naheliegende Gedanke ist, auf n Fächer mit Grundwert eins $A-n$ Kugeln zu verteilen. Bekanntlich ist dies auf $\binom{A-n+(n-1)}{n-1}=\binom{A-1}{n-1}$ Weisen möglich. Sollen die Summanden nun zusätzlich durch eine natürliche Zahl m beschränkt sein (*im Falle des gewöhnlichen Würfels also durch die Zahl sechs*), so muss die eben berechnete Anzahl möglicherweise korrigiert werden. Hierzu wähle man für $A-n>m-1$ eines der n Fächer und erhöhe seinen Grundwert auf $m+1$, wodurch gesichert ist, dass die nach Verteilen der restlichen $A-n-m$ Kugeln dargestellte Summe jedenfalls nicht korrekt ist. Die (*absichtlich fehlerhaften*) Verteilungen sind auf $\binom{A-n-m+(n-1)}{n-1}=\binom{A-m-1}{n-1}$ Weisen möglich und weiter gibt es $\binom{n}{1}=n$ mögliche Wahlen für das *aufgewertete* Fach. Somit resultiert als neue Abschätzung die Anzahl $\binom{A-1}{n-1}-\binom{n}{1}\cdot\binom{A-m-1}{n-1}$. Solange die Zahl $A-n-m$ der Kugeln für diese Korrektur nicht größer oder gleich der Schranke m ist, wird das zuletzt angeschriebene Ergebnis richtig sein. Widrigenfalls wurden all jene Summen mit zwei Summanden größer als m doppelt berücksichtigt und ganz wie im *Satz von Sylvester* müssen im Falle $A-n-m>m-1$ alle Möglichkeiten wieder addiert werden, $A-n-2m$ Kugeln auf zwei *aufgewertete* Fächer zu verteilen. Da es für die Fächerwahl $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten gibt, folgt für die jüngste Abschätzung $\binom{A-1}{n-1}-\binom{n}{1}\cdot\binom{A-m-1}{n-1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{A-2m-1}{n-1}$. Nach obigem Muster könnte auch jetzt noch eine Korrektur für Summen mit drei Summanden größer als die Schranke m nötig sein und so fort. Abhängig vom Summenwert $n\leq A\leq m\cdot n$ ergibt sich daher:

$$\binom{A-1}{n-1}-\binom{n}{1}\cdot\binom{A-m-1}{n-1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{A-2m-1}{n-1}-+\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{A-n}{m}\right\rfloor}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot\binom{A-k\cdot m-1}{n-1}$$

Für $m=6$ und $n=5$ ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet worden, in der noch speziell das Ereignis $11\leq Augensumme\leq 20$ ausgewiesen ist:



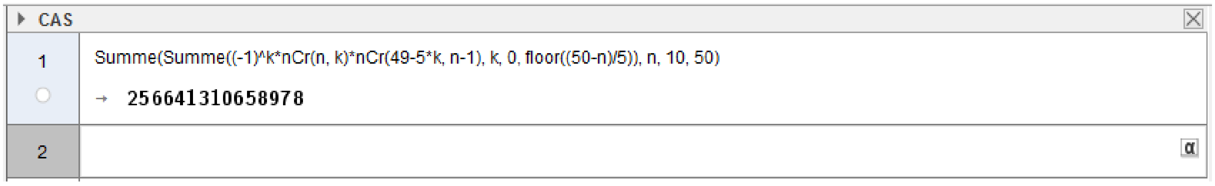
Anmerkung:

Eine über die reine Intuition hinausreichende Rechtfertigung obiger Formel fällt mir leider schwer. Dies liegt vor allem an der Konstruktion der Summen durch das Verteilen von Kugeln auf die n gewichteten Fächer. Möglicherweise gelingt sie mir zu einem späteren Zeitpunkt.

Mit obiger Formel kann auf noch einmal eine neue Variante der Wert von $f_5^{(50)}$ aus den Überlegungen zum Münzwurf berechnet werden. Die *Augensumme* ist dann 50 und die Schranke für die Summanden ist fünf. Offenkundig müssen dann mindestens zehn und dürfen höchstens 50 (*fünfseitige*) Würfel geworfen werden. Dies ergibt die nachstehende Doppelsumme:

$$\sum_{n=10}^{50} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{50-n}{5} \right\rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{49-5k}{n-1}$$

Diese ist im CAS von *geogebra* sehr leicht berechenbar und ergibt wunschgemäß den schon bekannten Wert.



Allgemeiner gilt:

$$f_m^{(n)} = \sum_{\nu=\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil}^{n} \sum_{\mu=0}^{\left\lfloor \frac{n-\nu}{m} \right\rfloor} (-1)^\mu \cdot \binom{\nu}{\mu} \cdot \binom{n-m\cdot\mu-1}{\nu-1}$$

Allerdings erfordert die Doppelsumme erhebliche Rechenzeit.

Anmerkung:

Die sehr anregende Aktivität „Würfelschnitte und Augensumme“ *von Reinhard Schmidt interpretiert die Augensummen A offenbar als Schnitte von Hyperebenen* $\sum_{k=1}^{n} x_k = A$ *mit einem „Gitterwürfel“* $\{1;2;3;4;5;6\}^n$. *Erklärt man sodann angeleitet von den beobachteten Schnitten am Quadrat und am Würfel induktiv Dreieckszahlen höherer Ordnung durch* $\Delta_k^{(1)} = 1$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\Delta_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \Delta_j^{(n-1)}$, *so findet man ziemlich sicher die geschlossene Form* $\Delta_k^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n-2}(k+i)$. *Die jeweils ersten sechs dieser Zahlen geben die Anzahlen möglicher Summen auch korrekt wider. Es verbleibt aber, die Beschreibung der darüber hinaus notwendig werdenden Korrekturen zu finden.*