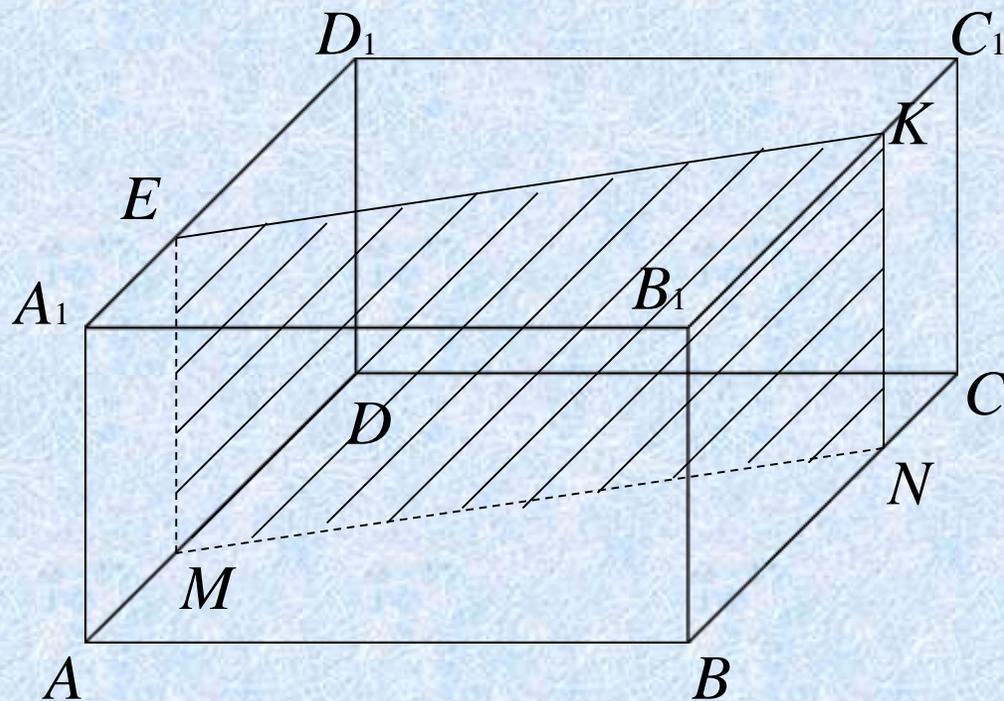
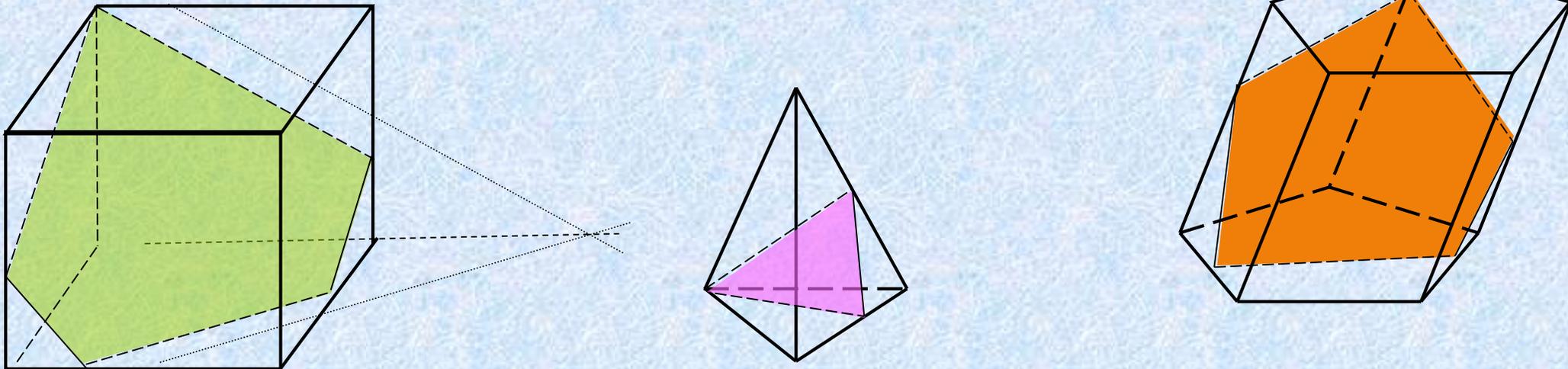


# «ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ»

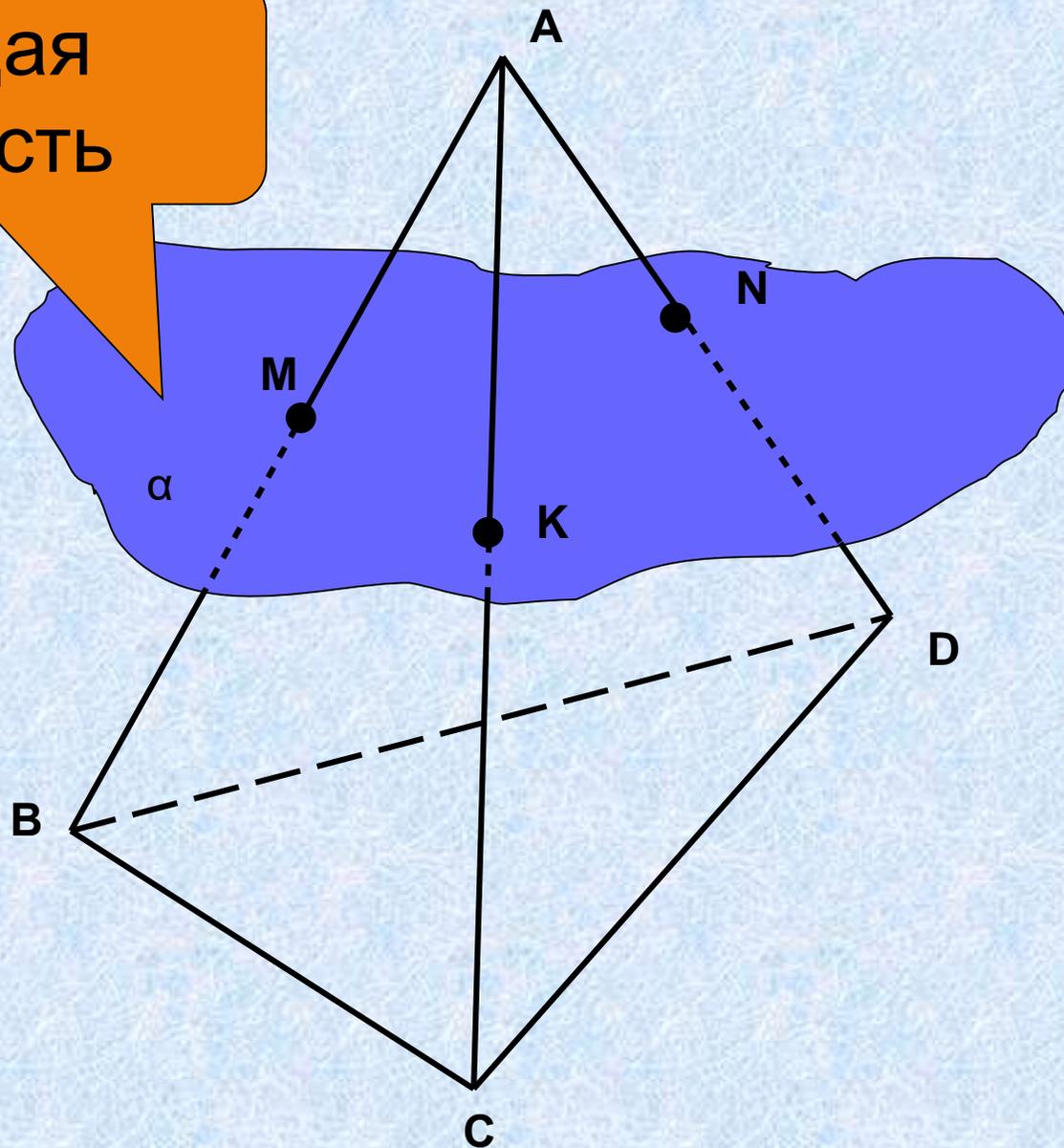


# Определение сечения

- ✓ *Секущей плоскостью многогранника назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.*
- ✓ *Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.*

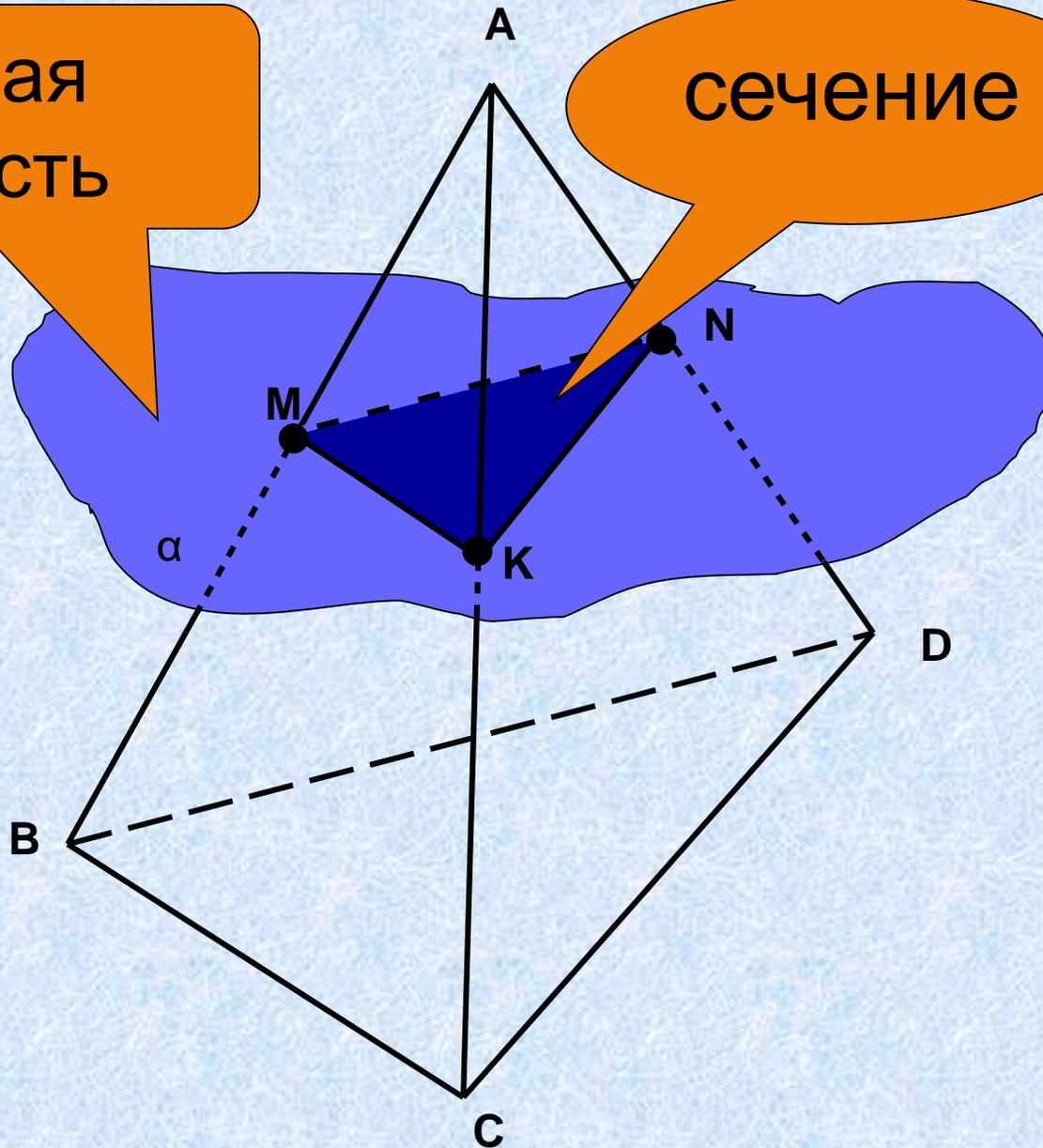


Секущая  
плоскость



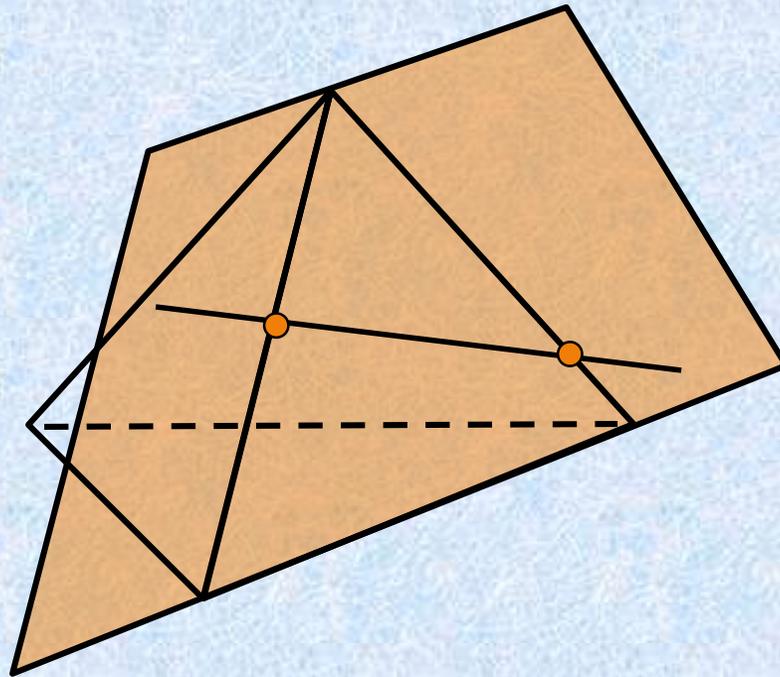
Секущая  
плоскость

сечение



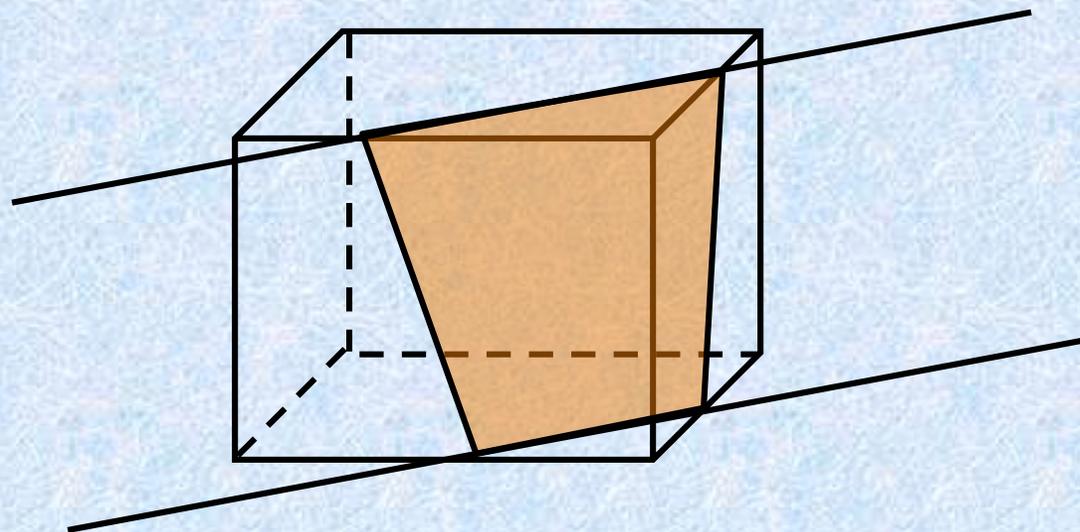
# Геометрические утверждения

- ✓ Если две точки одной прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.



# Геометрические утверждения

- ✓ Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то **линии их пересечения параллельны.**

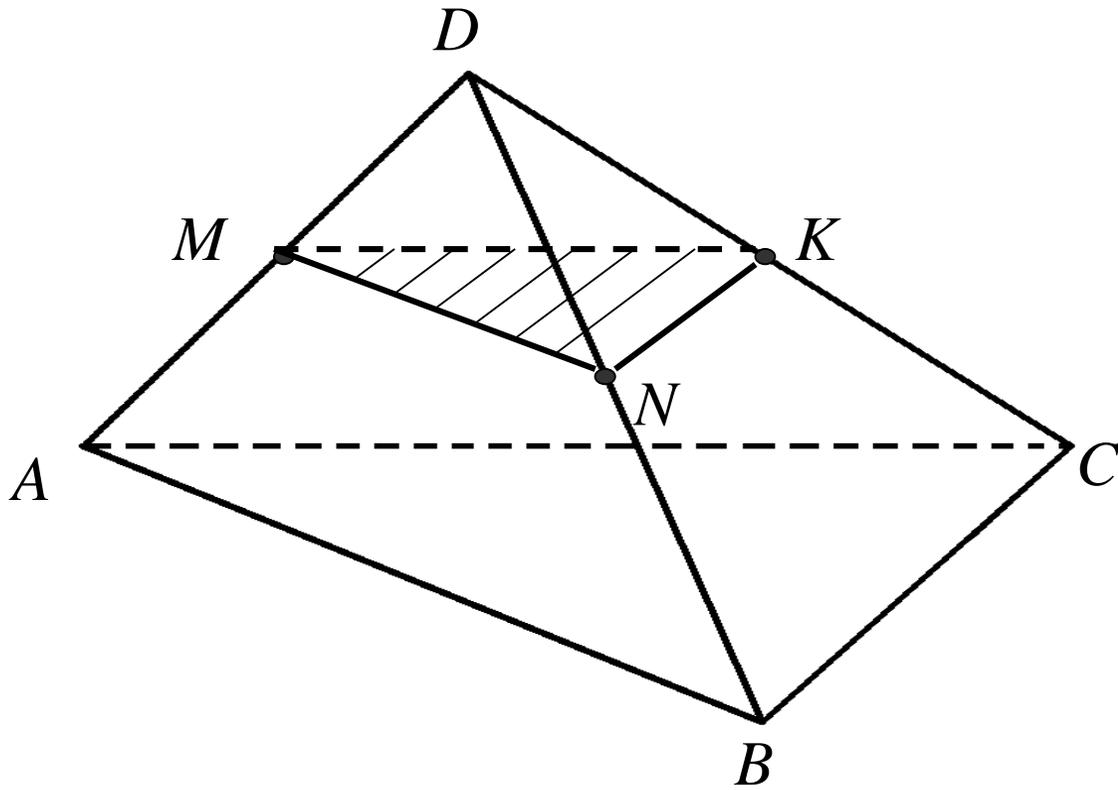


## **Плоскость сечения может задаваться:**

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2. Прямой и точкой, не лежащей на ней;
3. Двумя пересекающимися прямыми;
4. Двумя параллельными прямыми.

**Все эти случаи можно свести к первому, выбирая на прямых удобные для нас точки.**

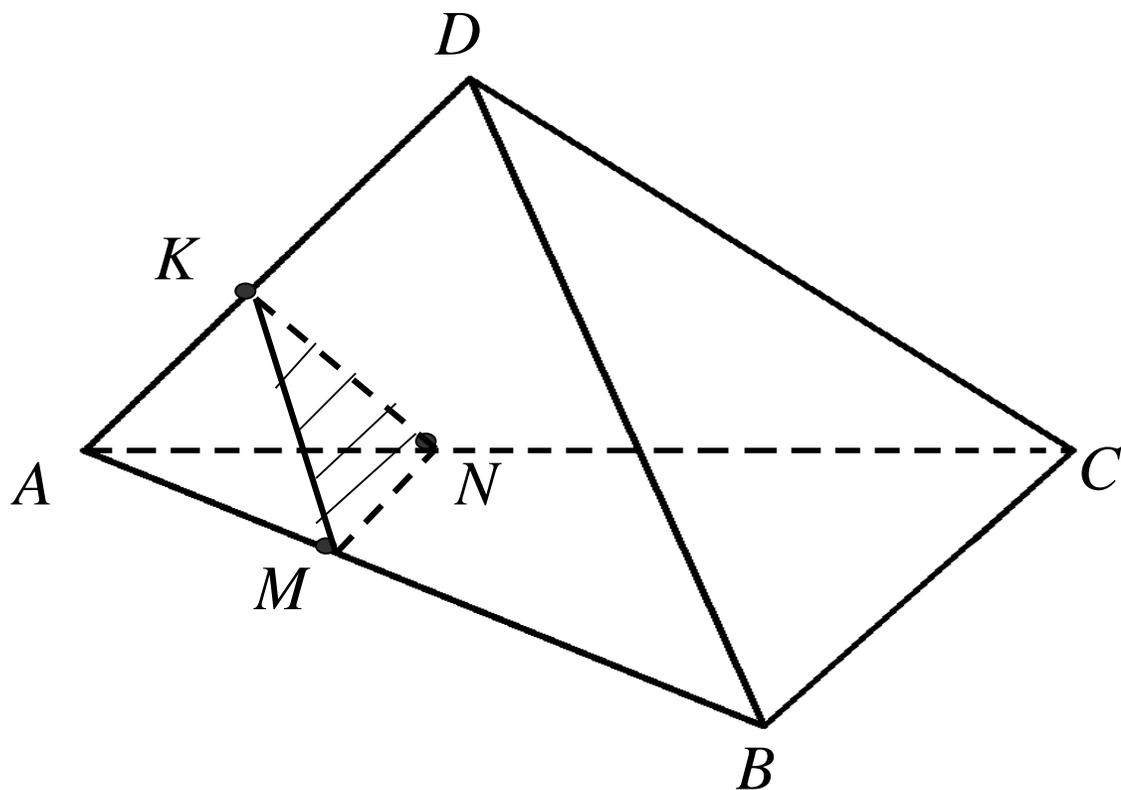
**1. Построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через данные точки  $M, N, K$ . ( $M, N, K$  – середины рёбер)**



*Построение:*

- 1. Соединяем  $N$  и  $K$ .*
- 2. Соединяем  $M$  и  $N$ .*
- 3. Соединяем  $M$  и  $K$ .*
- 4.  $MNK$ -Полученное сечение*

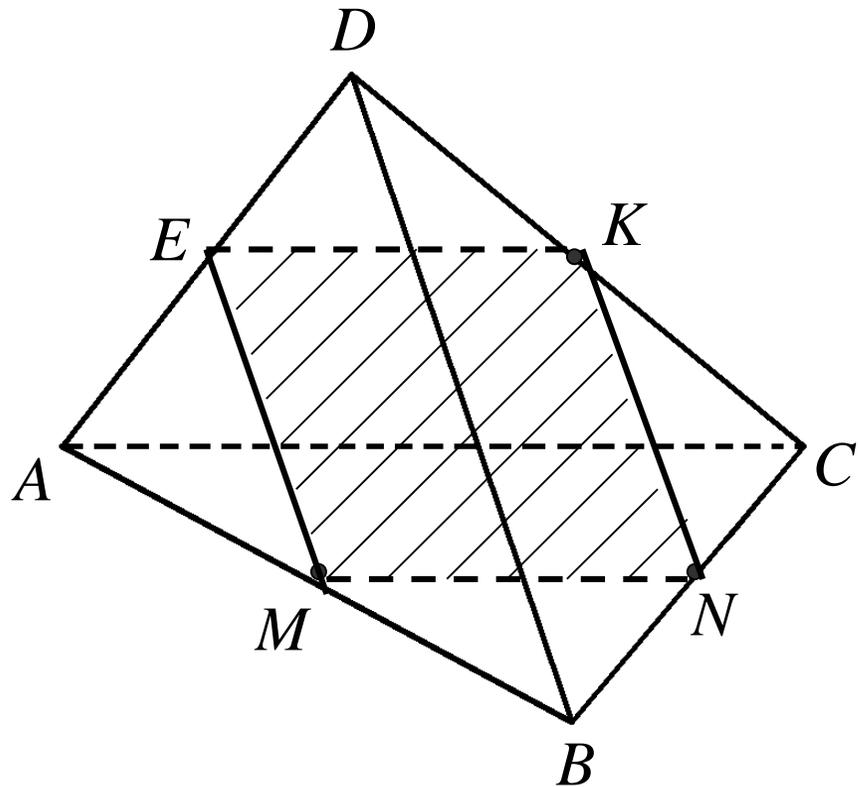
**2. Построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через данные точки  $M, N, K$ . ( $M, N, K$  – середины рёбер)**



Построение:

1. Соединяем  $M$  и  $K$ .
2. Соединяем  $M$  и  $N$ .
3. Соединяем  $K$  и  $N$ .
4.  $MNC$  – Полученное сечение.

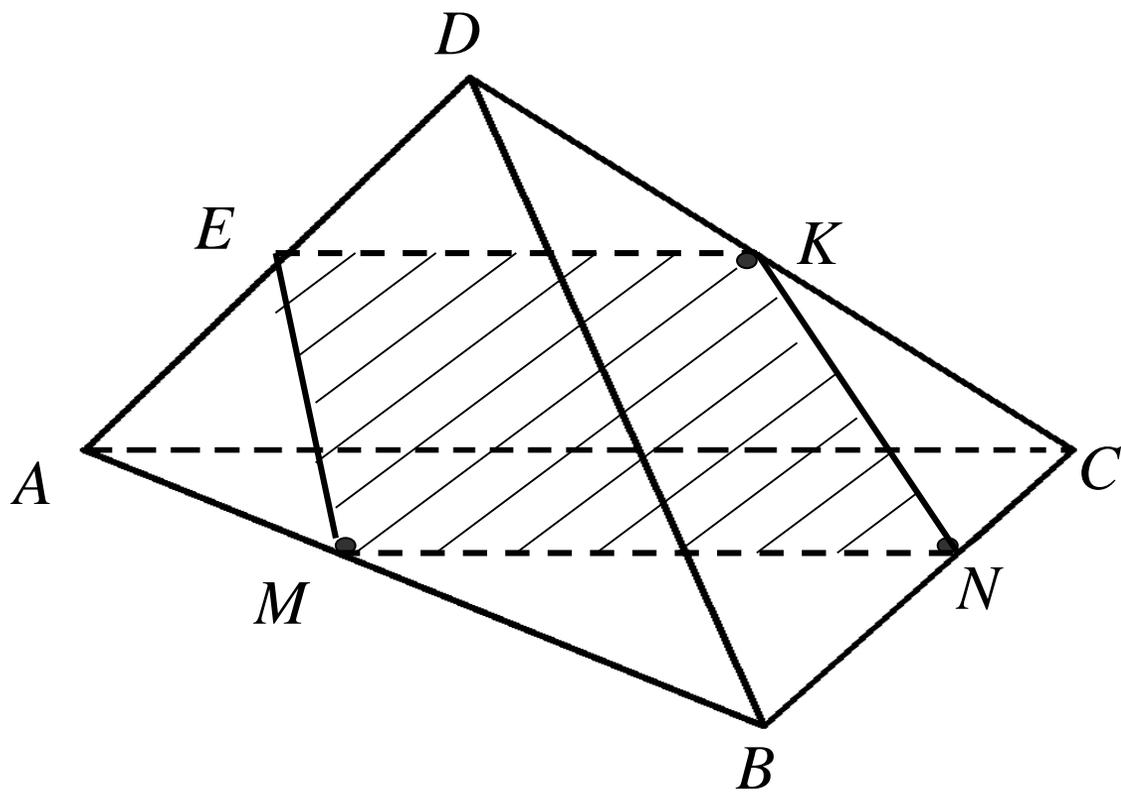
**3. Построить сечение тетраэдра  $DABC$   
плоскостью, проходящей через данные точки  
 $M, N, K$ . ( $M, N, K$  – середины рёбер)**



*Построение:*

- 1. Соединяем  $M$  и  $N$ .*
- 2. Соединяем  $K$  и  $N$ .*
- 3. Проводим  $KE$  параллельно  $MN$ .*
- 4. Соединяем  $M$  и  $E$ .*
- 5.  $MNKE$  – Полученное сечение.*

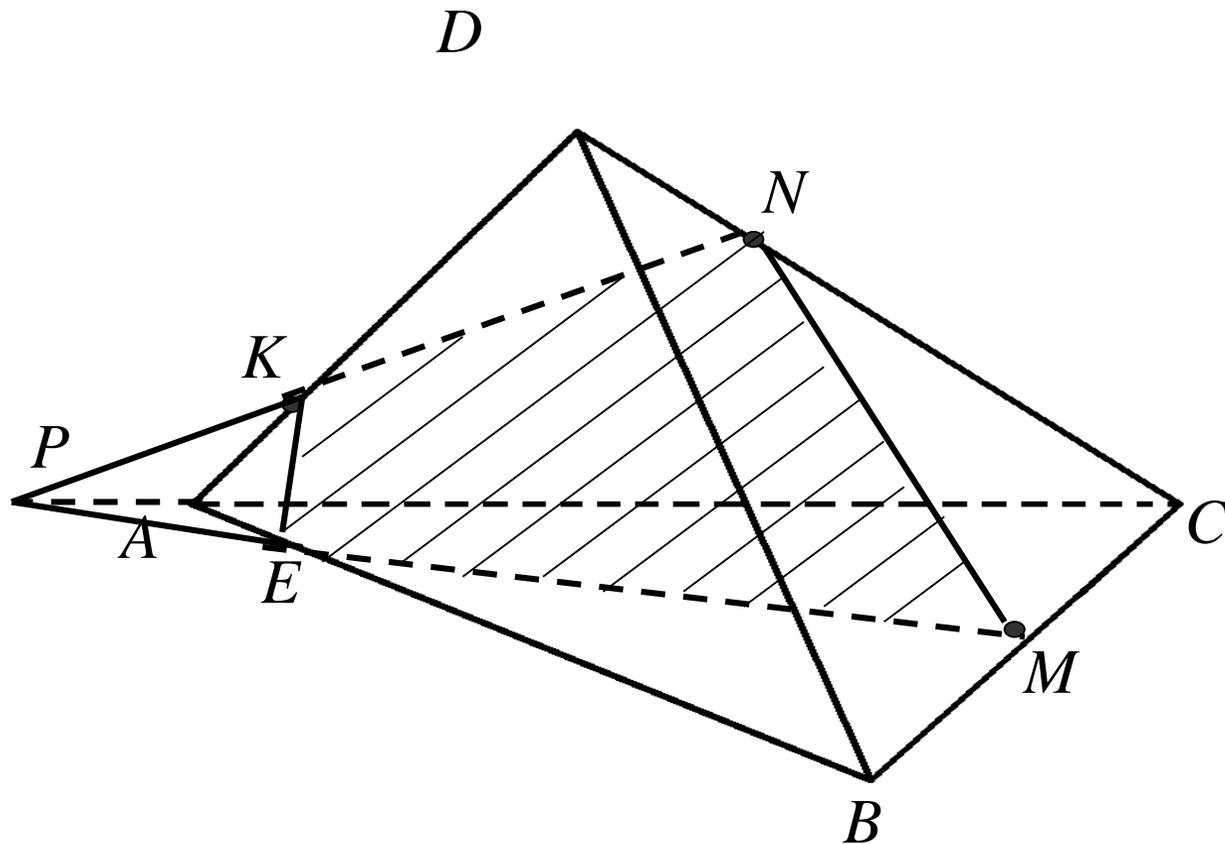
**4. Построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через данные точки  $M, N, K$ .**



*Построение:*

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2. Соединяем  $K$  и  $N$ .
3. Проводим  $KE$  параллельно  $MN$ .
4. Соединяем  $M$  и  $E$ .
5.  $MNKE$  – Полученное сечение.

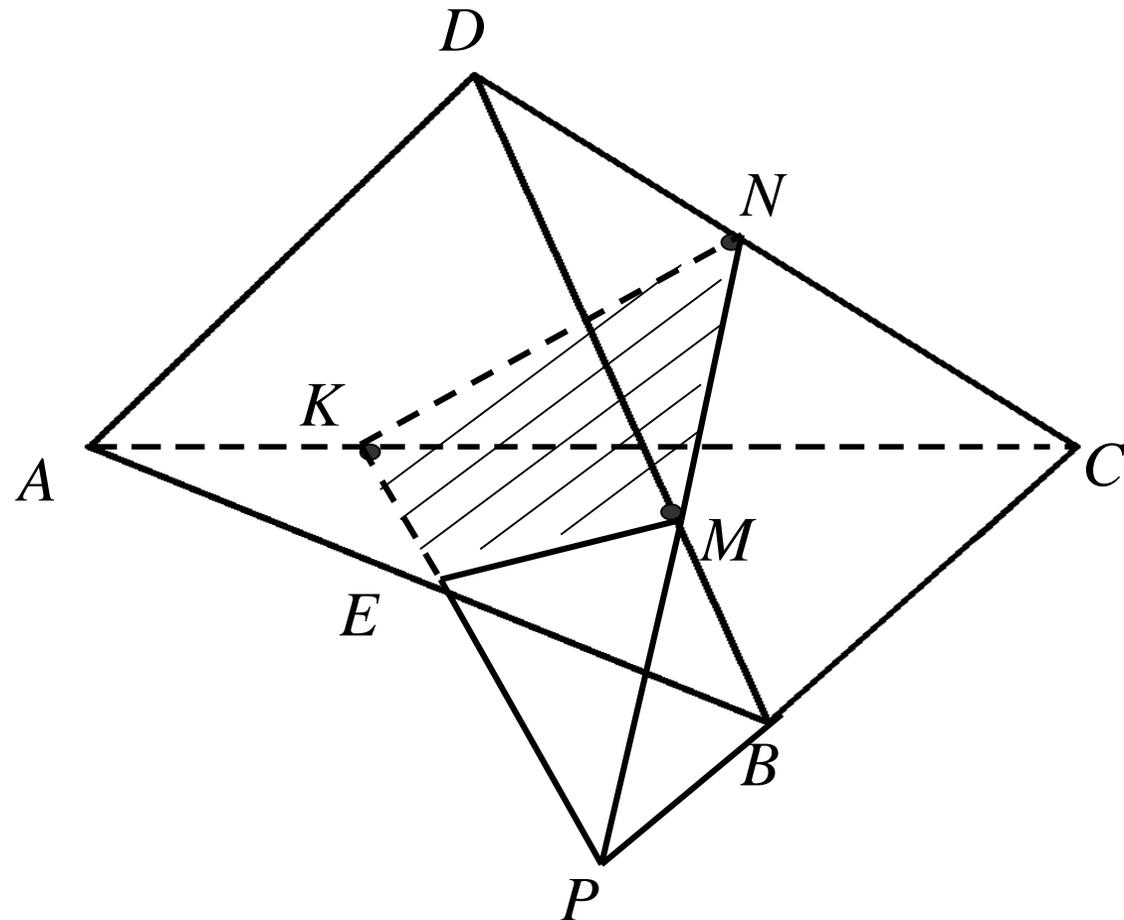
**5. Построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через данные точки  $M, N, K$ .**



*Построение:*

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2. Соединяем  $K$  и  $N$ .
3.  $KN \cap AC = P$
4. Соединяем  $P$  и  $M$ .
5. Соединяем  $K$  и  $E$
6.  $KNME$  – Полученное сечение

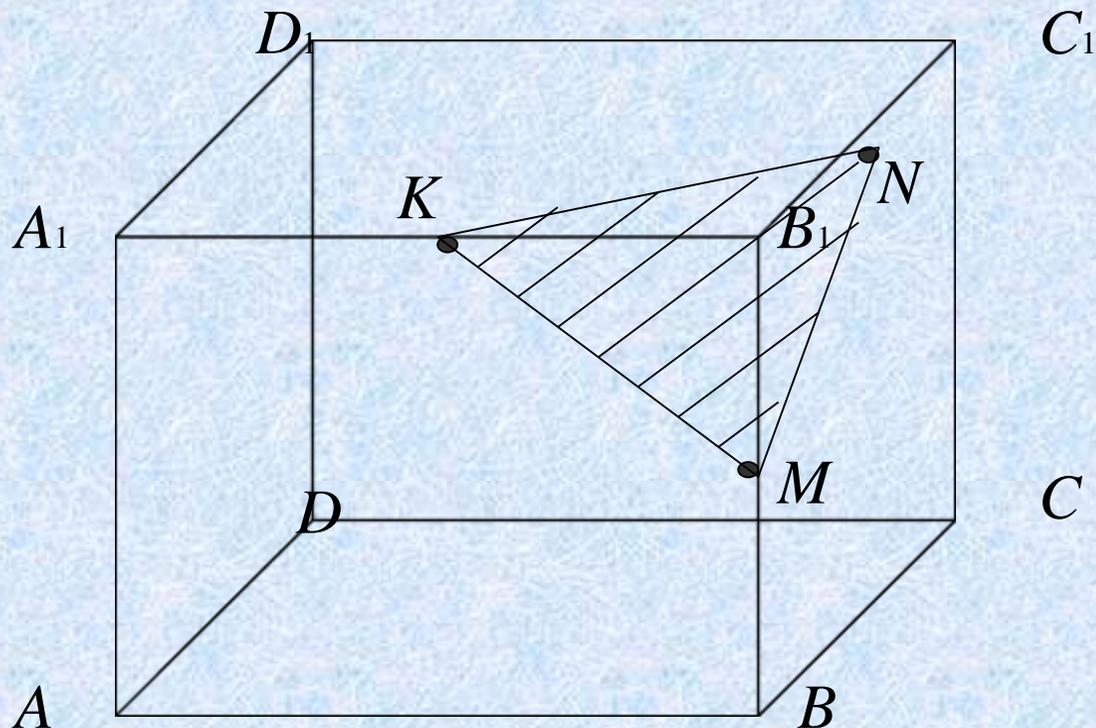
**6. Построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через данные точки  $M, N, K$ .**



*Построение:*

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2. Соединяем  $K$  и  $N$ .
3.  $NM \cap CB = P$ .
4.  $PK \cap AB = E$ .
5. Соединяем  $E$  и  $M$ .
6.  $KNPME$  – Полученное сечение

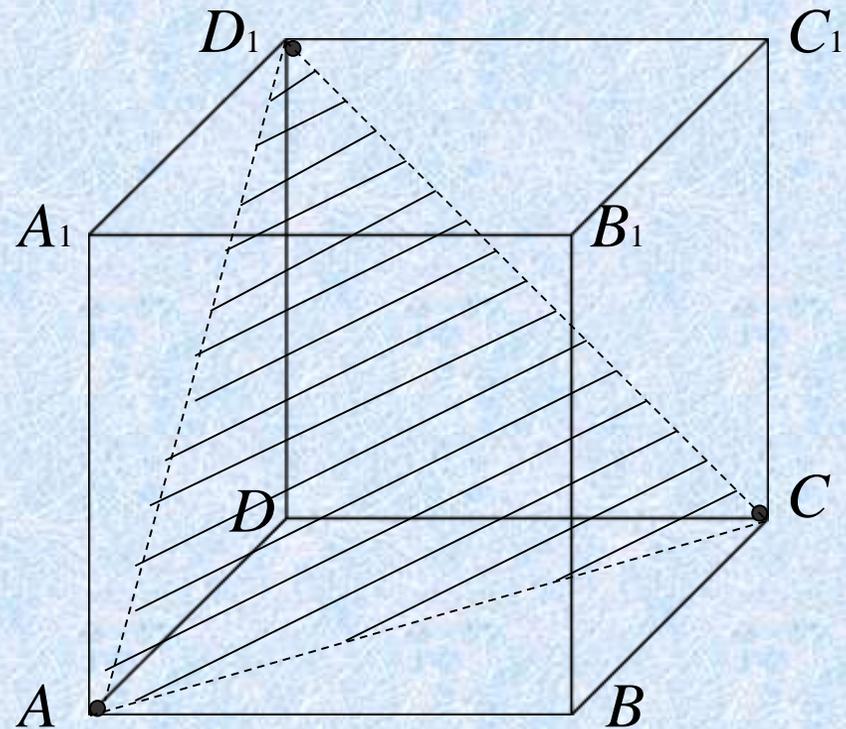
**7. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся серединами его рёбер.**



*Построение:*

- 1. Соединяем M и N.*
- 2. Соединяем K и N.*
- 3. Соединяем K и M*
- 4. KNM – Полученное сечение*

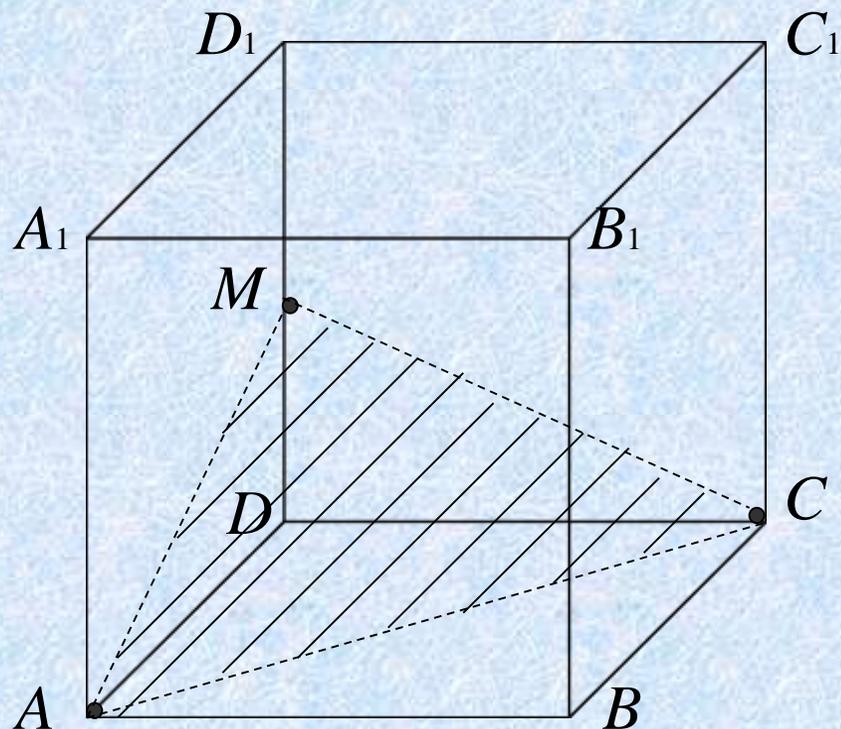
**8. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся вершинами куба.**



Построение:

1. Соединяем A и C.
2. Соединяем D<sub>1</sub> и C.
3. Соединяем D<sub>1</sub> и A
4. ACD<sub>1</sub> – Полученное сечение

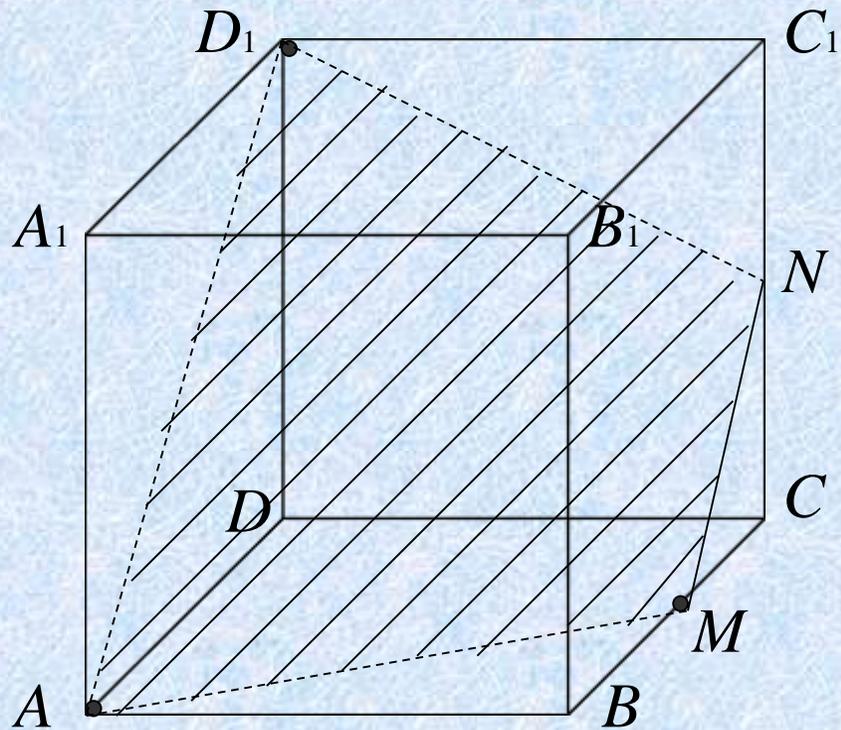
**9. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся:  $M$  - серединой его рёбра,  $A$  и  $C$  – вершинами куба.**



*Построение:*

- 1. Соединяем  $A$  и  $C$ .*
- 2. Соединяем  $M$  и  $C$ .*
- 3. Соединяем  $A$  и  $M$*
- 4.  $ACM$  – Полученное сечение*

**10. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся:  $M$  - серединой его рёбра,  $A$  и  $D_1$  – вершинами куба**



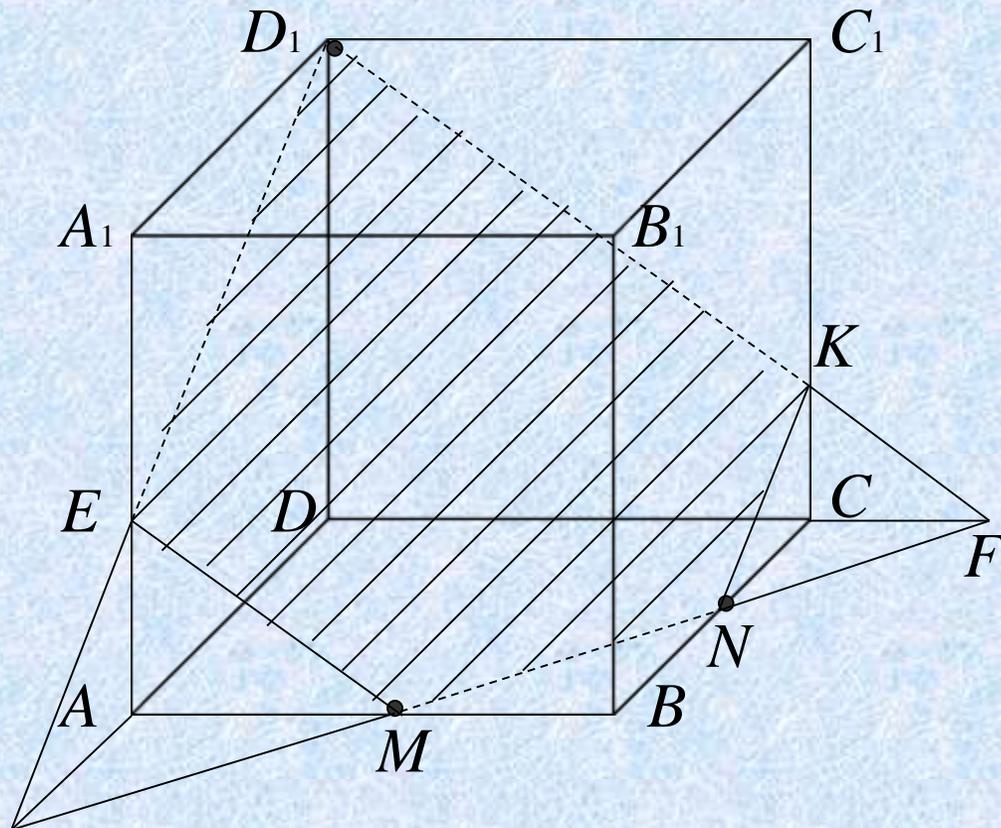
Построение:

1. Соединяем  $A$  и  $M$ .
2. Соединяем  $A$  и  $D_1$ .
3.  $MN \parallel AD_1$ .
4. Соединяем  $D_1$  и  $N$ .
5.  $AD_1NM$  – Полученное сечение

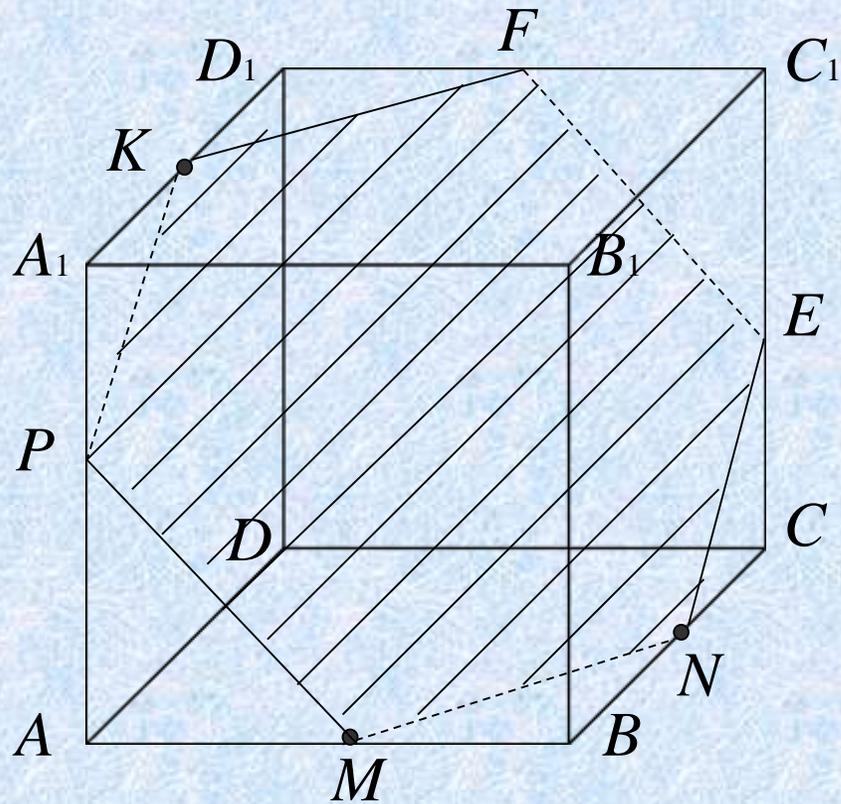
**11. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся:  $M$  и  $N$  - серединами его рёбер,  $D_1$  – вершиной куба**

Построение:

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2.  $MN \cap DC = F$ .
3.  $MN \cap DA = Q$
4.  $QD_1 \cap AA_1 = E$
5.  $FD_1 \cap CC_1 = K$
6. Соединяем  $N$  и  $K$ .
7. Соединяем  $E$  и  $M$ .
8.  $ED_1KNM$  – Полученное сечение.



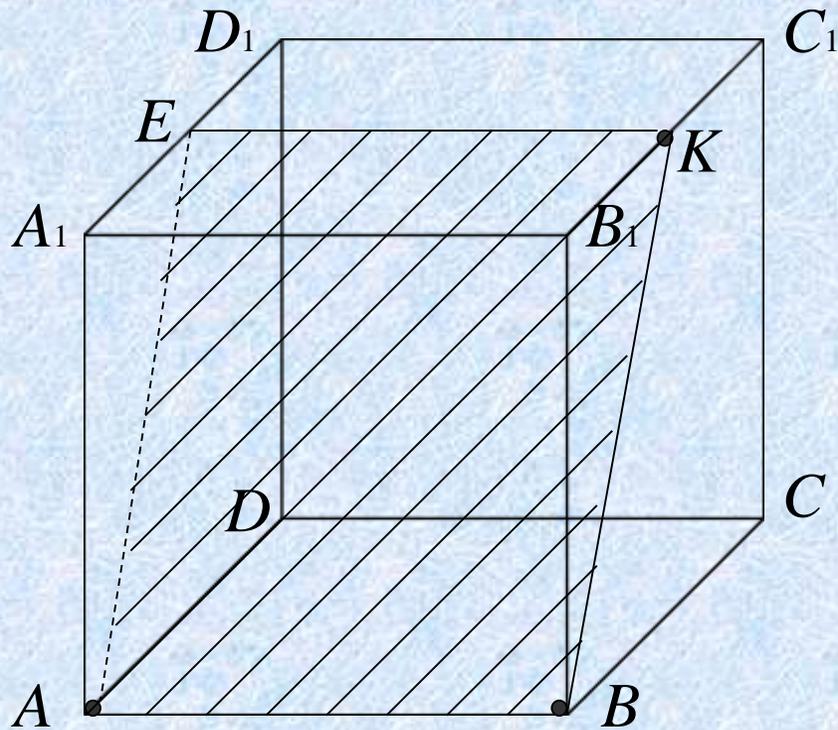
**12. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся серединами его рёбер.**



Построение:

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2.  $MN \cap AD = Q$ .
3.  $QK \cap AA_1 = P$
4. Соединяем  $M$  и  $P$ .
5.  $NE \parallel PK$ .
6.  $FE \parallel PM$ .
7.  $MN \parallel KF$ .
8.  $PKFENM$  – Полученное сечение

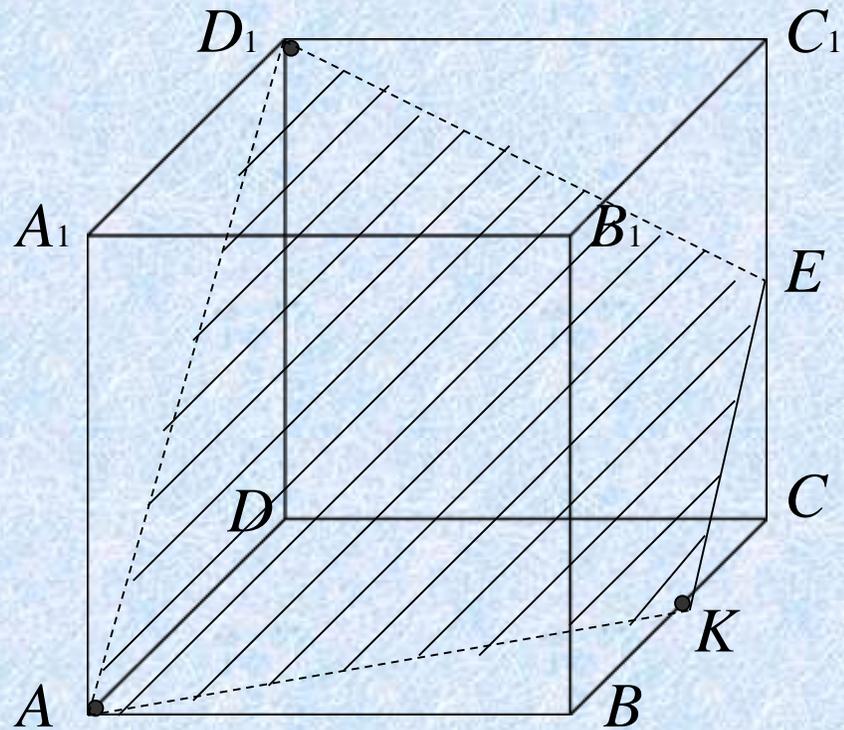
**13. Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:  $A, B, K$ .**



Построение:

1. Соединяем  $B$  и  $K$ .
2.  $E K \parallel A B$ .
3.  $A E \parallel B K$ .
4.  $A E K B$  – Полученное сечение.

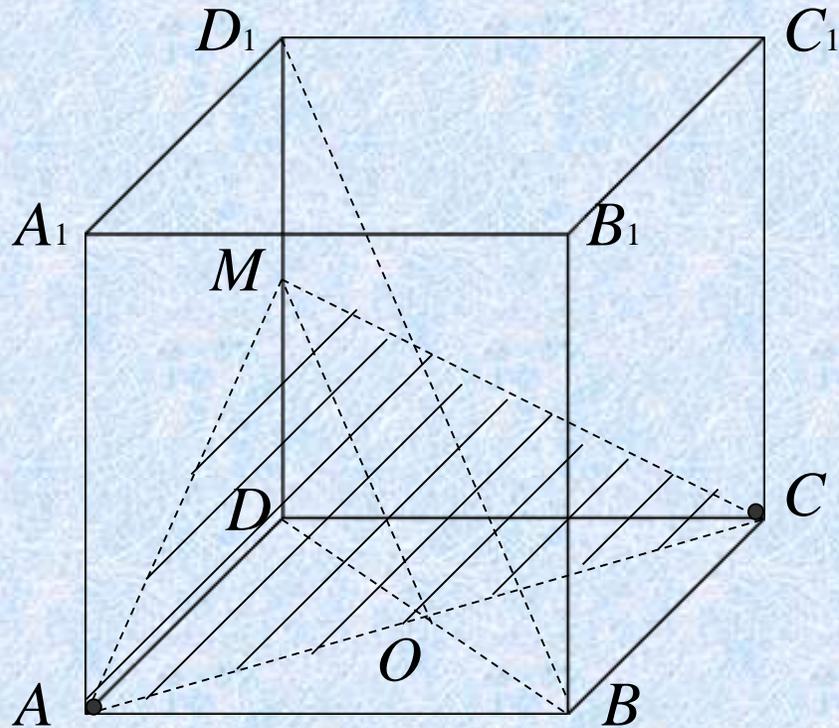
**14. Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:  $A, D_1, K$ .**



*Построение:*

1. Соединяем  $A$  и  $K$ .
2. Соединяем  $A$  и  $D_1$ .
3.  $KN \parallel AD_1$ .
4. Соединяем  $D_1$  и  $E$ .
5.  $AD_1EK$  –  
Полученное сечение

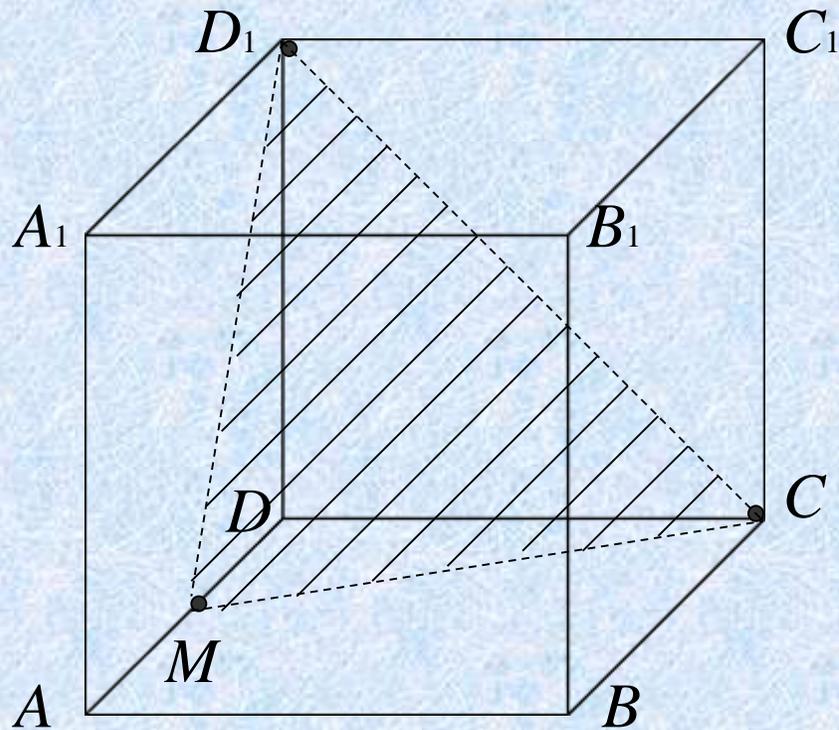
**15. Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:  $A$  и  $C$  параллельно диагонали  $B D_1$**



*Построение:*

1. Соединяем  $A$  и  $C$ .
2. Соединяем  $D$  и  $B_1$ .
3.  $DB_1 \cap AC = O$ .
4.  $OM \parallel D_1 B_1$ .
5. Соединяем  $A$  и  $M$ .
6. Соединяем  $M$  и  $C$ .
7.  $AMC$  – Полученное сечение.

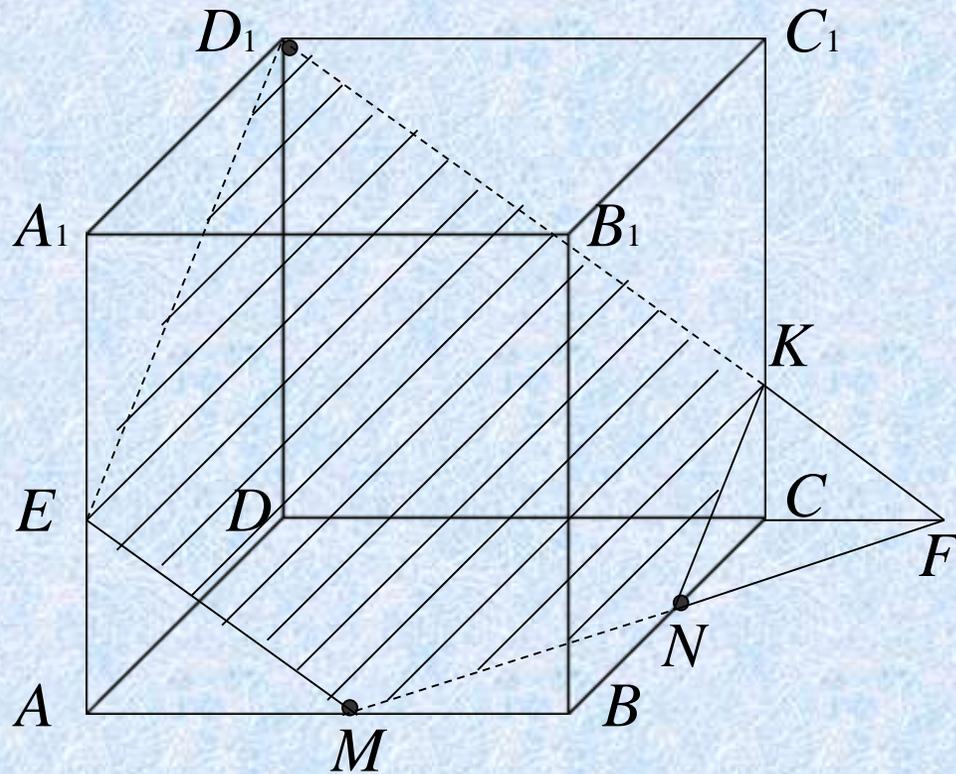
**16. Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:  $M, D_1, C$ .**



*Построение:*

- 1. Соединяем  $M$  и  $C$ .*
- 2. Соединяем  $D_1$  и  $C$ .*
- 3. Соединяем  $D_1$  и  $M$*
- 4.  $MCD_1$  – Полученное сечение*

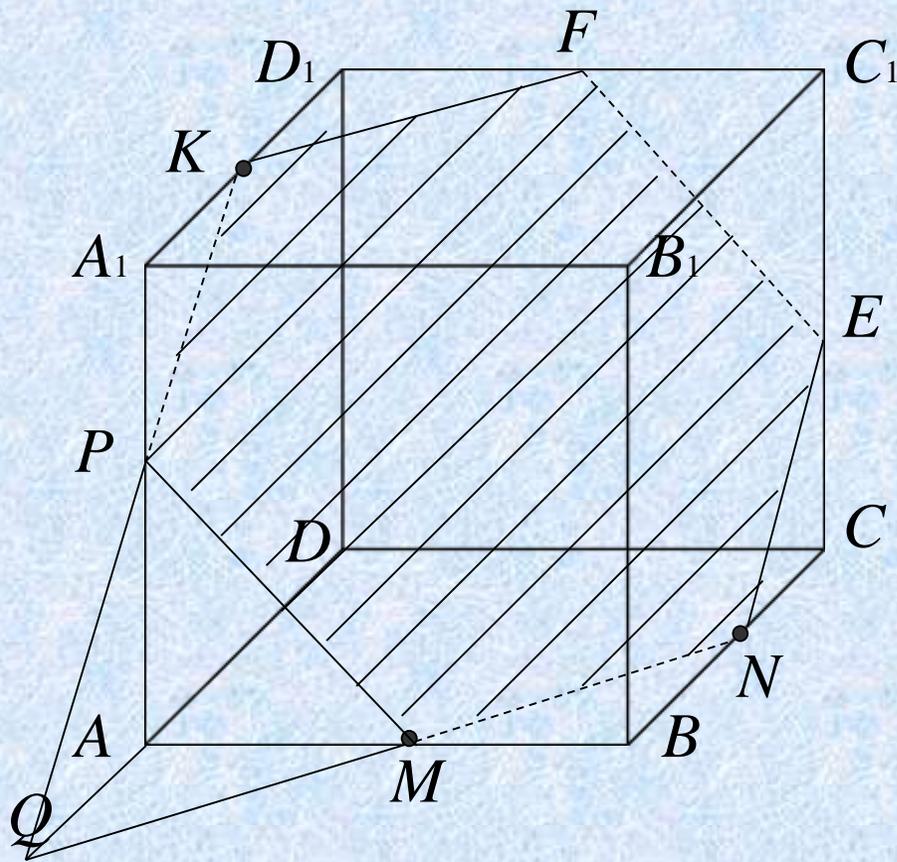
**17. Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:  $M, D_1, N$ .**



Построение:

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2.  $MN \cap DC = F$
3.  $MN \cap DA = Q$
4.  $QD_1 \cap AA_1 = E$
5.  $FD_1 \cap CC_1 = K$
6. Соединяем  $N$  и  $K$ .
7. Соединяем  $E$  и  $M$ .
8.  $ED_1KNM$  – Полученное сечение.

**18. Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки:  $K, M, N$ .**



Построение:

1. Соединяем  $M$  и  $N$ .
2.  $MN \cap AD = Q$ .
3.  $QK \cap AA_1 = P$
4. Соединяем  $M$  и  $P$ .
5.  $NE \parallel PK$ .
6.  $FE \parallel PM$ .
7.  $MN \parallel KF$ .
8.  $PKFENM$  –

Полученное сечение

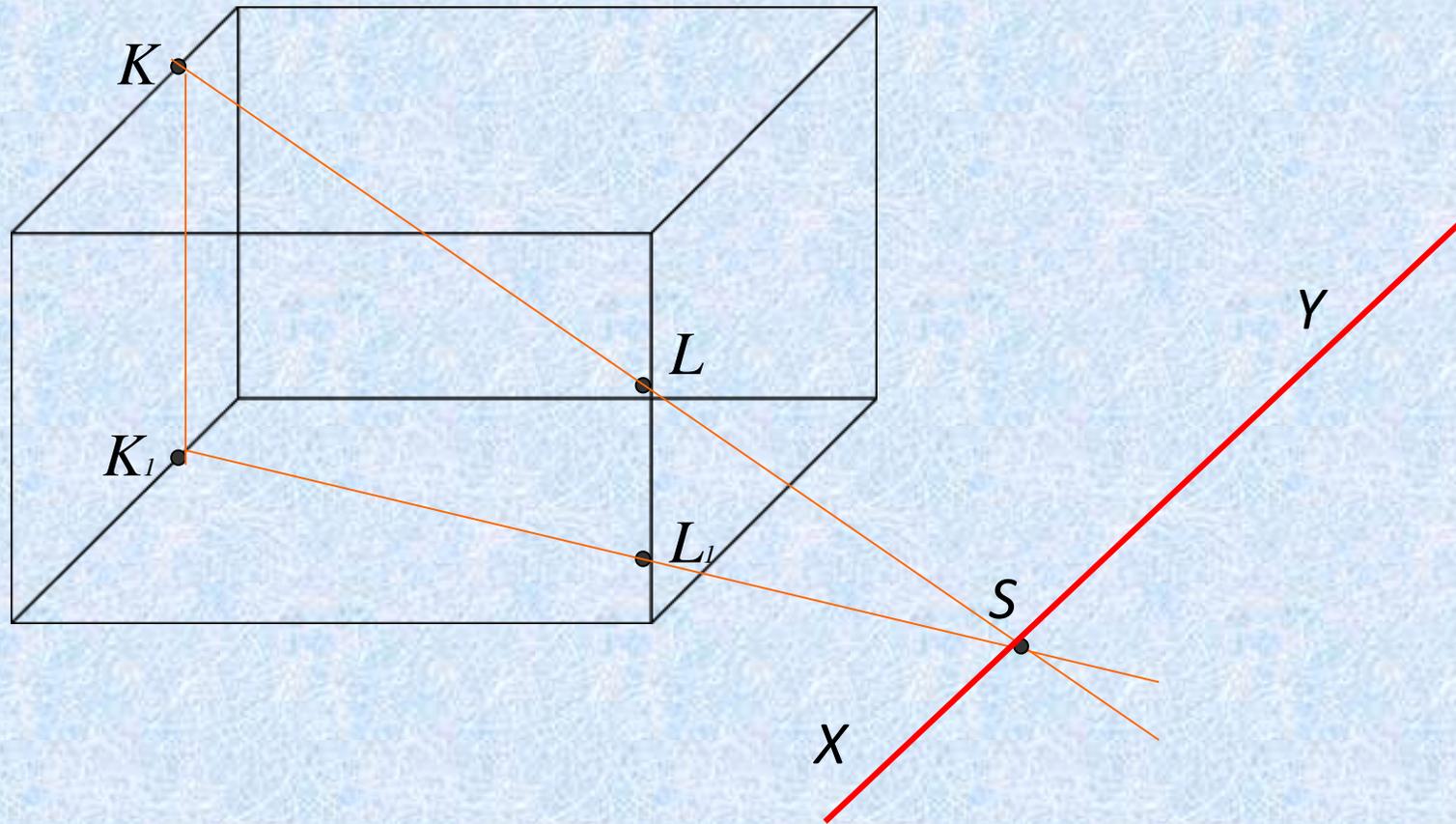
# Построение сечений методом следов

Способы задания сечений весьма различны, и универсального метода их построения не существует. Наиболее доступными и эффективными в практике являются следующие три метода построения сечений многоугольников:

1. Метод следов.
2. Метод внутреннего проектирования.
3. Комбинированный метод.

Рассмотрим метод следов. Раньше уже говорилось, что плоскость сечения имеет общую прямую с плоскостью каждой грани многоугольника. Прямую, по которой секущая плоскость какой-либо грани многогранника, называют следом секущей плоскости. Секущая плоскость имеет столько следов, сколько плоскостей она пересекает. Чаще всего находят тот след секущей плоскости, который лежит в плоскости нижнего основания.

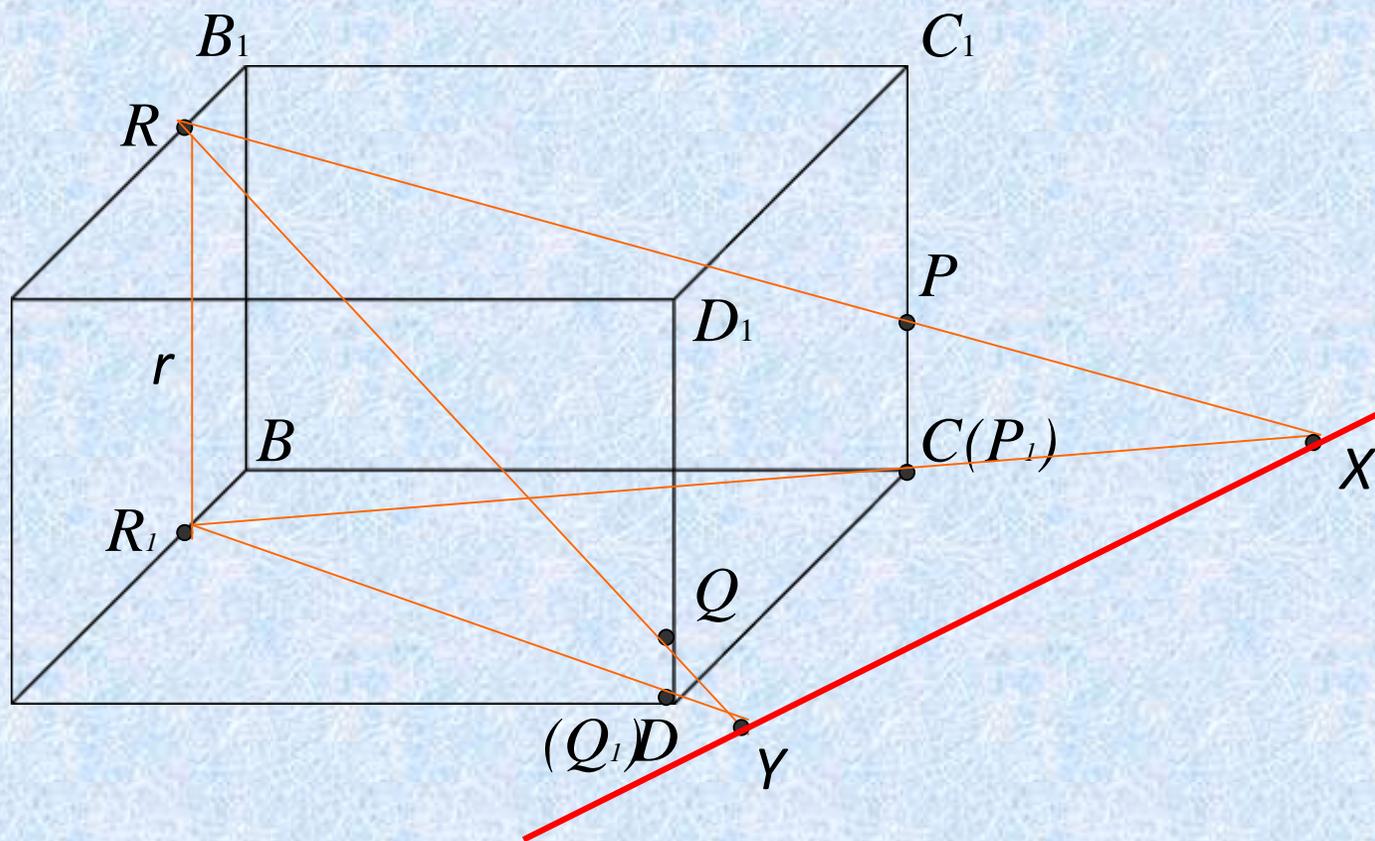
При построении след секущей плоскости играет особую роль. Утверждение: пусть боковые ребра некоторого многогранника параллельны и прямая  $XU$  – след плоскости, пересекающей этот многогранник. Тогда если точки  $K$  и  $L$  лежат секущей плоскости, а точки  $K_1$  и  $L_1$  – их проекции на плоскости грани, в которой лежит след  $XU/KK_1$  и  $LL_1$  параллельны боковому ребру многогранника, тогда точка пересечения прямых  $KL$  и  $K_1L_1$  лежит на следе  $XU$ .



*Это утверждение и лежит в основе построения сечений многогранников методом следов.*

*Для нахождения определенного следа секущей плоскости необходимо, кроме указания точек, определяющих секущую плоскость, указать так же параллельные проекции этих точек на плоскости той грани, в которой ищется след. Так если требуется построить след секущей плоскости на плоскости нижнего основания параллелепипеда, то, кроме точек, лежащих непосредственно в секущей плоскости, необходимо указать также параллельные проекции этих точек на плоскости нижнего основания ( в направлении, параллельном боковому ребру параллелепипеда).*

# 1. Найти след секущей плоскости на плоскости ABC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ при: $PC \perp CC_1$ , $QC \perp DD_1$ , $RC \perp AA_1$ .



Построение:

1. Построим точки  $P_1, Q_1$  и  $R_1$  – проекция точек  $P, Q$ , и  $R$  на плоскости  $ABC$ .  $P_1$  совпадёт с точкой  $C$ , а  $Q_1$  с  $D$ .

2. Проведём  $r=RR_1, r \parallel AA_1, r \cap AB=R_1$

3.  $RP \cap R_1P_1=X, X$  – точка на искомом следе.

4.  $RQ \cap R_1Q_1=Y, Y$  – точка на искомом следе.

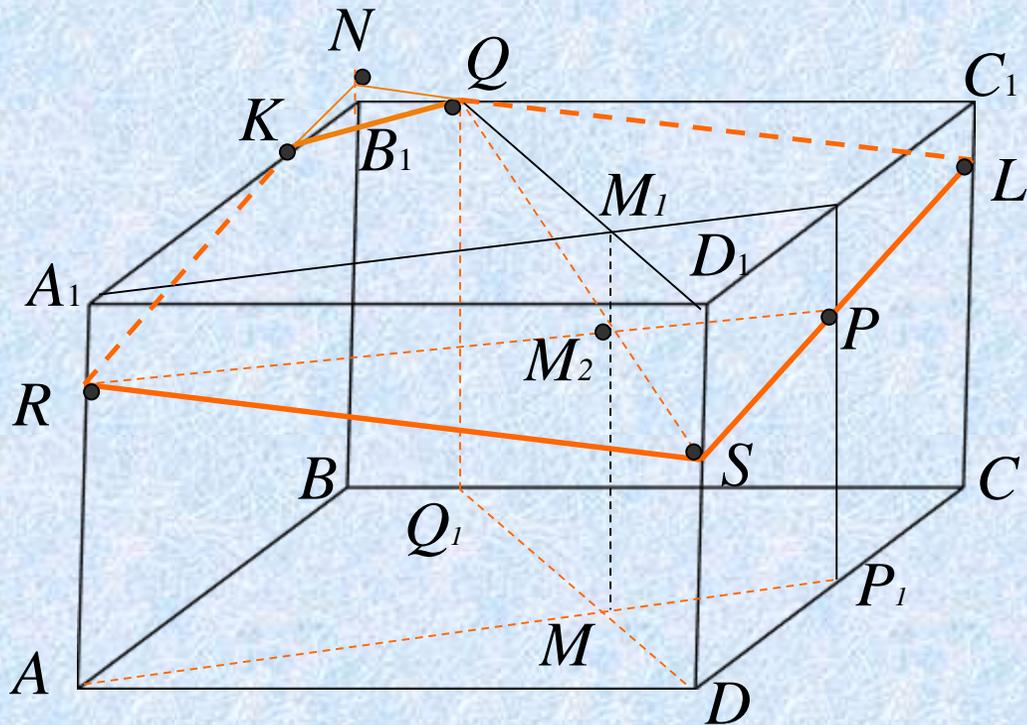
5. Соединим точки  $Y$  и  $X$ .  $YX$  – Искомый след.

## 2. Постройте сечение параллелепипеда

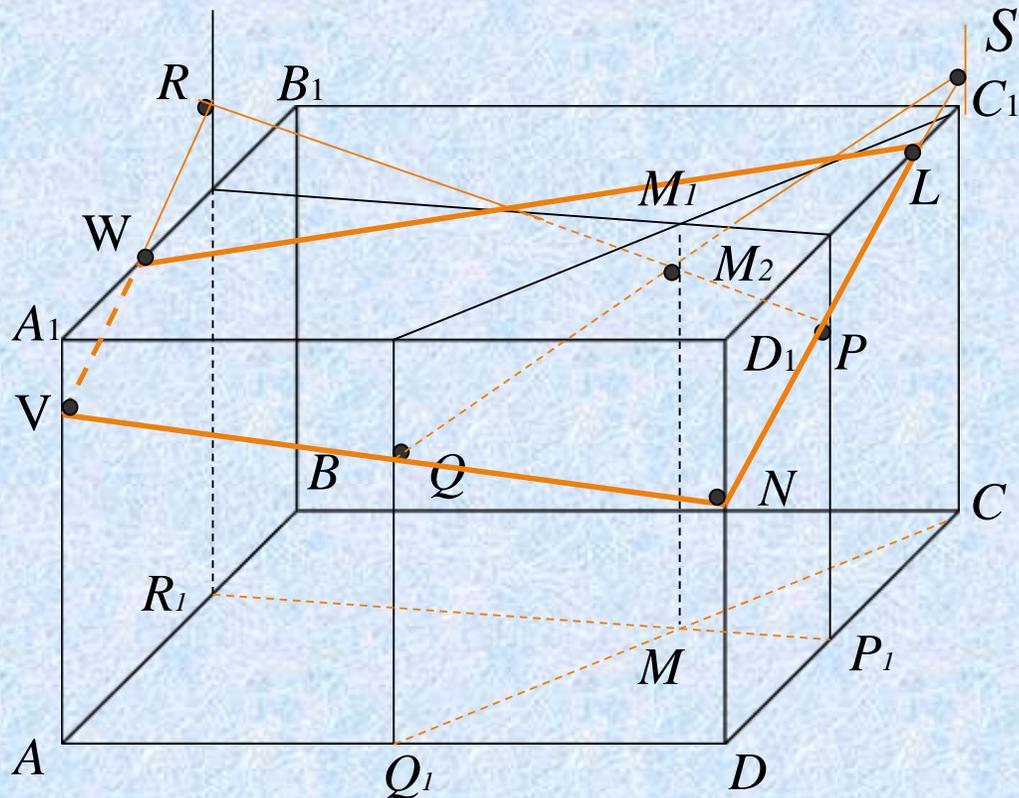
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $PQR$ . Точка  $P$  – лежит на грани  $CC_1 D_1 D$ ,  $Q$  – расположена на ребре  $B_1 C_1$ , а точка  $R$  – на ребре  $AA_1$ .

Построение:

1. Построим плоскости  $AA_1 P P_1$  и  $DD_1 Q Q_1$  при  $AA_1 \parallel PP_1$ ,  $DD_1 \parallel QQ_1$ .
2. Построим прямую  $MM_1 = AA_1 P P_1 \cap DD_1 Q Q_1$ .
3.  $PR \cap MM_1 = M_2$
4.  $QM_2 \cap DD_1 = S$
5.  $SP \cap CC_1 = L$
6.  $QL \cap BB_1 = N$
7.  $RN \cap A_1 B_1 = K$
8. Соединим точки  $K$  и  $Q$ ,  $R$  и  $S$ .  
 $RSLQK$  – искомое сечение.



**3. Постройте сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $PQR$ . Точка  $P$  – лежит на грани  $CC_1 D_1 D$ ,  $Q$  – расположена на грани  $AA_1 D_1 D$ , а точка  $R$  – в плоскости грани  $AA_1 B_1 B$ .**



*Построение:*

1. Построим плоскости  $PP_1R_1R$  и  $CC_1QQ_1$  при  $PP_1 \parallel RR_1$ ,  $CC_1 \parallel QQ_1$ .
2. Построим прямую  $MM_1 = PP_1R_1R \cap CC_1QQ_1$ .
3.  $PR \cap MM_1 = M_2$
4.  $QM_2 \cap CC_1 = S$
5.  $SP \cap C_1D_1 = L$   $SP \cap DD_1 = N$
6.  $NQ \cap AA_1 = V$
7.  $VR \cap A_1B_1 = W$
8. Построим прямую  $WL$ .  $NVWL$  – искомое сечение.

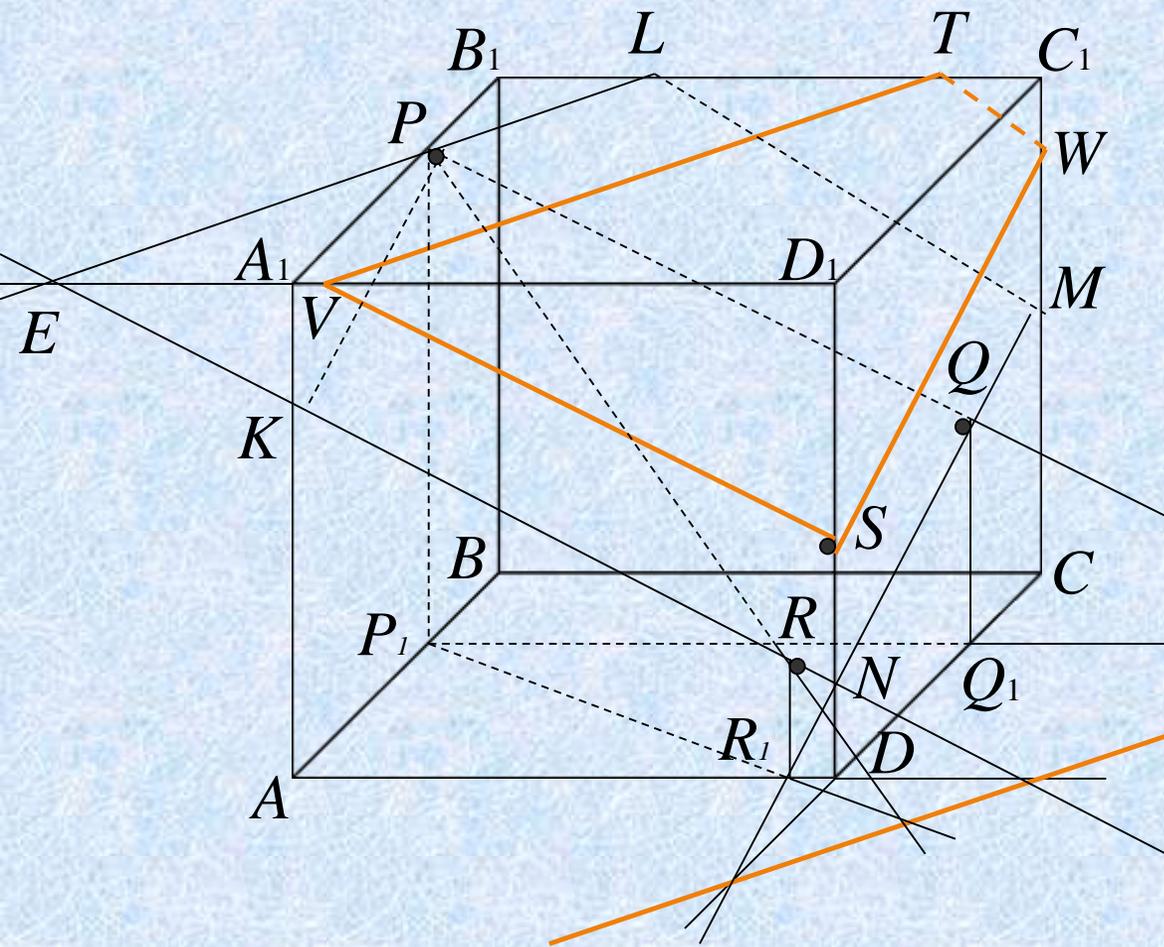
# **Комбинированный метод построения сечений.**

*При построении сечений этим методом на каких-то этапах решения применяются приёмы изложенные в методе следов или в методе внутреннего проектирования, а на других этапах применяется теоремы, изученные в разделе.*



## 2. Постройте сечение параллелепипеда

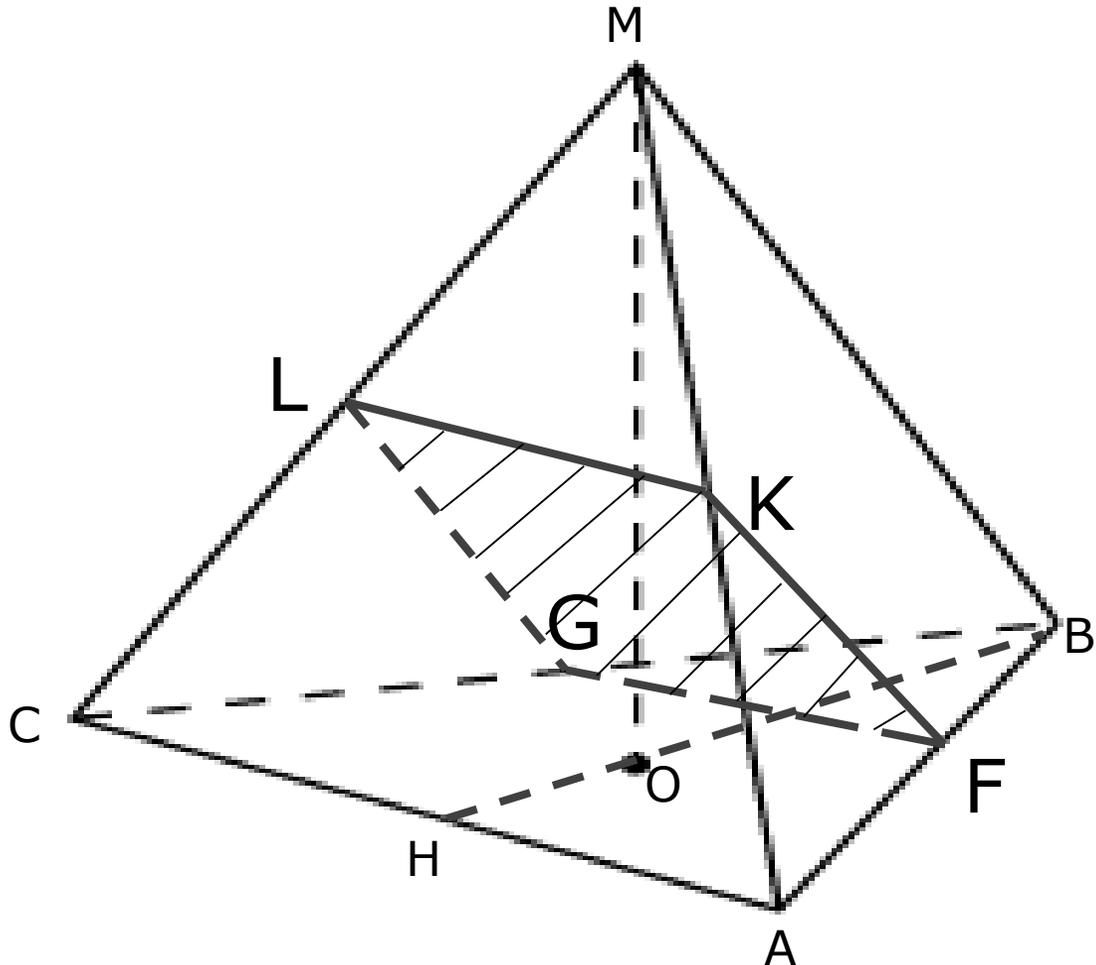
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $PQR$ . Точка  $P$  – лежит на грани  $CC_1 D_1 D$ ,  $Q$  – расположена на грани  $AA_1 D_1 D$ , а точка  $R$  – в плоскости грани  $AA_1 B_1 B$ .



Построение:

1. Построим с вспомогательное сечение плоскостью  $PQR$ .
2. Построим прямую  $VS \parallel EN$ .
3. Построим прямую  $SW \parallel NM$ .
4. Построим прямую  $VT \parallel EL$ .
5. Построим прямую  $TW$
6.  $SVTW$  – искомое сечение.

512883. В правильной треугольной пирамиде  $МABC$  с вершиной  $М$  высота равна 9, а боковые рёбра равны 15. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $BC$  параллельно прямой  $MB$ .



Построение:

1.  $F$ -середины  $AB$

$G$ -середины  $BC$ .

2. Соединяем  $F$  и  $G$

3.  $FK \parallel MB$ ,  $GL \parallel MB$

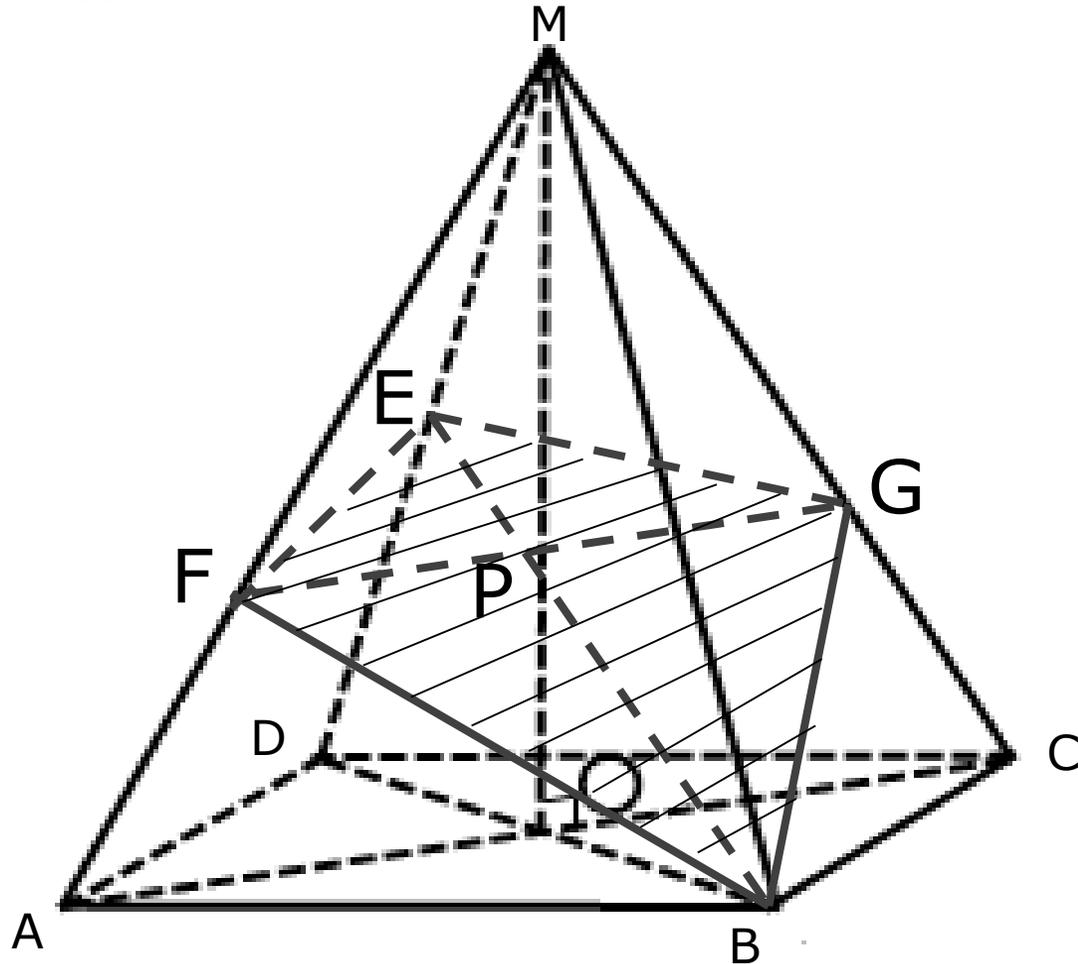
4. Соединяем  $L$  и  $K$

5. Искомое сечение  $KLFG$

Находим  $S_{\text{сеч}} KLFG$

Ответ:  $45\sqrt{3}$

501945. В правильной четырёхугольной пирамиде  $MABCD$  с вершиной  $M$  стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $B$  и середину ребра  $MD$  параллельно прямой  $AC$ .



Построение:

1. Проводим  $BE$   
 $E$ -середина  $MD$

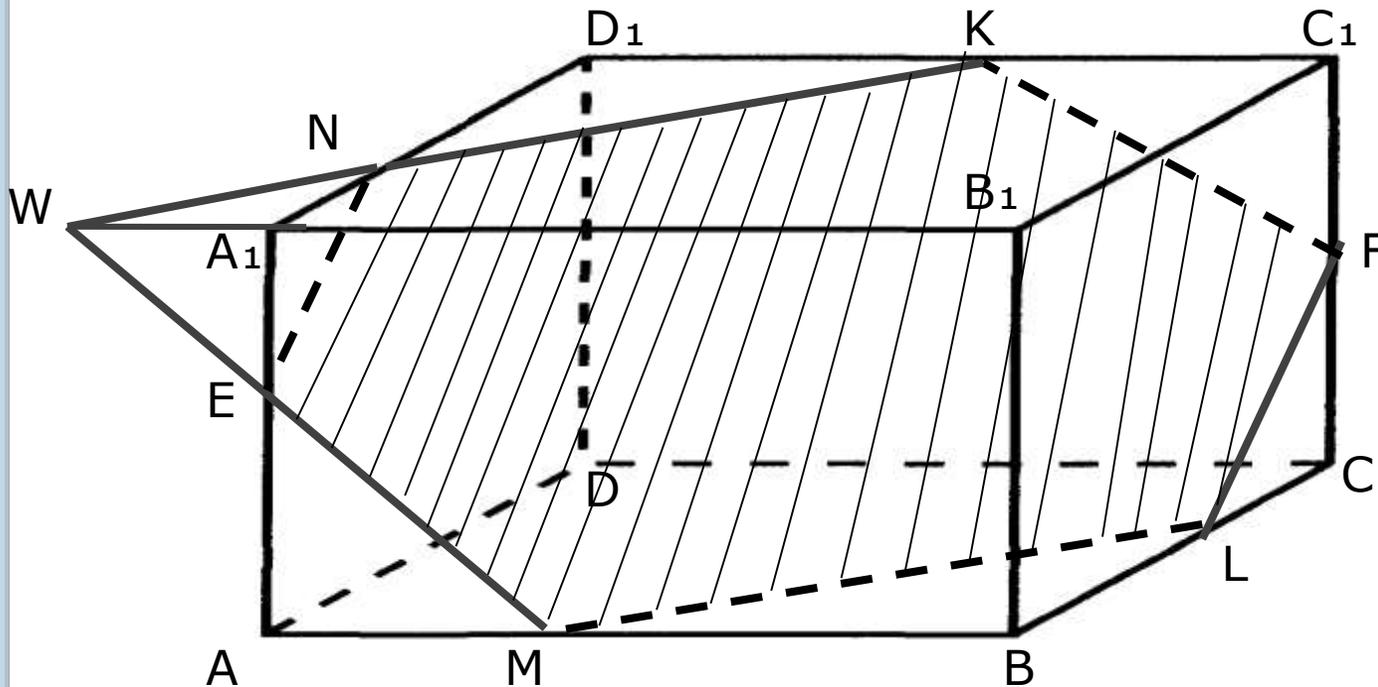
2.  $MO \cap BE = P$

3.  $FG \parallel AC$

4. Искомое сечение  $BGEF$   
 Находим  $S_{\text{сеч } BGEF}$

Ответ:  $5\sqrt{2}$

513606. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна 3, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $\sqrt{6}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1 D_1$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1 N = C_1 K = 1$ . Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .



Построение:

1. Соединяем  $N$  и  $K$
2.  $LM \parallel NK$
3.  $NK \cap A_1 B_1 = W$
4. Соединяем  $MW$
5.  $MW \cap AA_1 = E$
6.  $EM \parallel FK$
7. Соединяем  $L$  и  $F$
8. Искомое сечение -  $MLFKNE$

Находим  $S_{\text{сеч}} MLFKNE$

Ответ: 10.

# Литература.

1. Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений/Л.С.Атанасян и др. М.: Просвещение, 2006.
2. Задачи на развитие пространственных представлений. – М.: Просвещение, 1991.
3. Газеты «Математика».
4. Семёнов А.Л., Яценко И.В. ГИА: 4000 задач с ответами по математике. М.: «Экзамен», 2015.
5. <http://reshuege.ru> Образовательный портал для подготовки к экзаменам «РешуЕГЭ по математике».
6. [www.alexlarin.net](http://www.alexlarin.net) Сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ и ОГЭ, поступающим в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
7. <http://85.142.162.119/os11/xmodules/qprint/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B>  
Открытый банк заданий ЕГЭ (профильный уровень).
8. <http://85.142.162.119/os11/xmodules/qprint/index.php?proj=E040A72A1A3DABA14C90C97E0B6EE7DC>  
Открытый банк заданий ЕГЭ (базовый уровень).