

# verloop exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

August 10, 2020

## 1 herhaling

## 2 het getal e

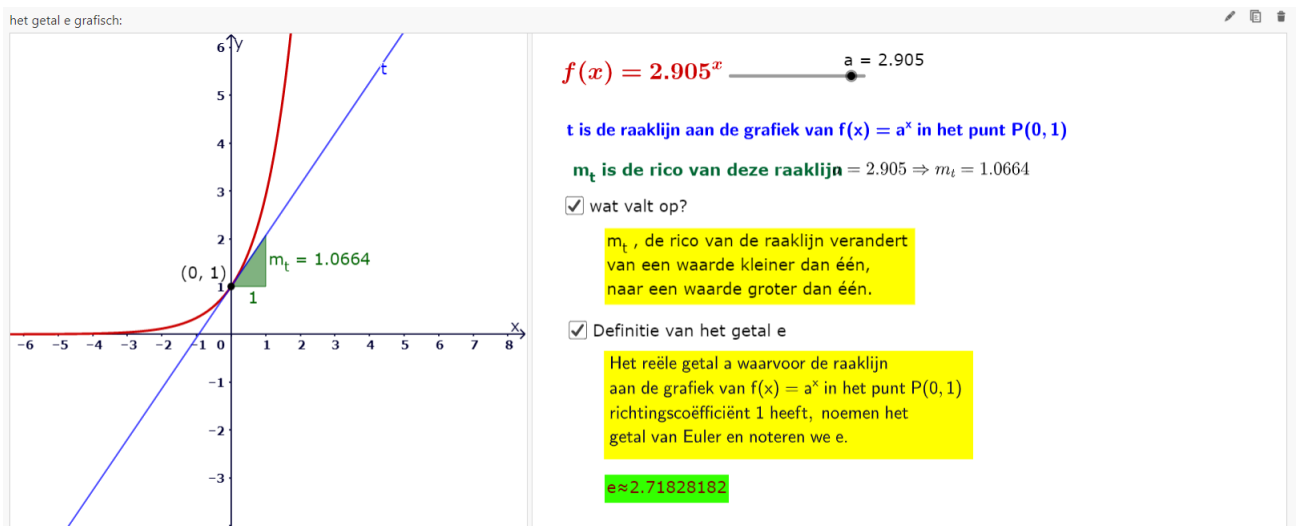


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW>

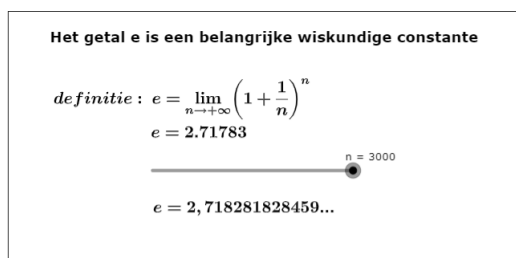


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW>

### 3 rekenregels

Rekenregels exponenten (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn).  $m$  en  $n$  zijn gehele getallen.

1.  $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$
2.  $(e^m)^n = e^{mn}$
3.  $\frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$
4.  $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$
5.  $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
6.  $e^0 = 1$
7.  $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^m} = (\sqrt[n]{e})^m$

Rekenregels logaritmen (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn)

1.  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2.  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3.  $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$
4.  $\ln(e^x) = x$
5.  $e^{\ln(x)} = x$
6.  $\ln(e) = 1$
7.  $\ln(1) = 0$

Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm>

### 4 exp en log functies met grondtal e

grafieken

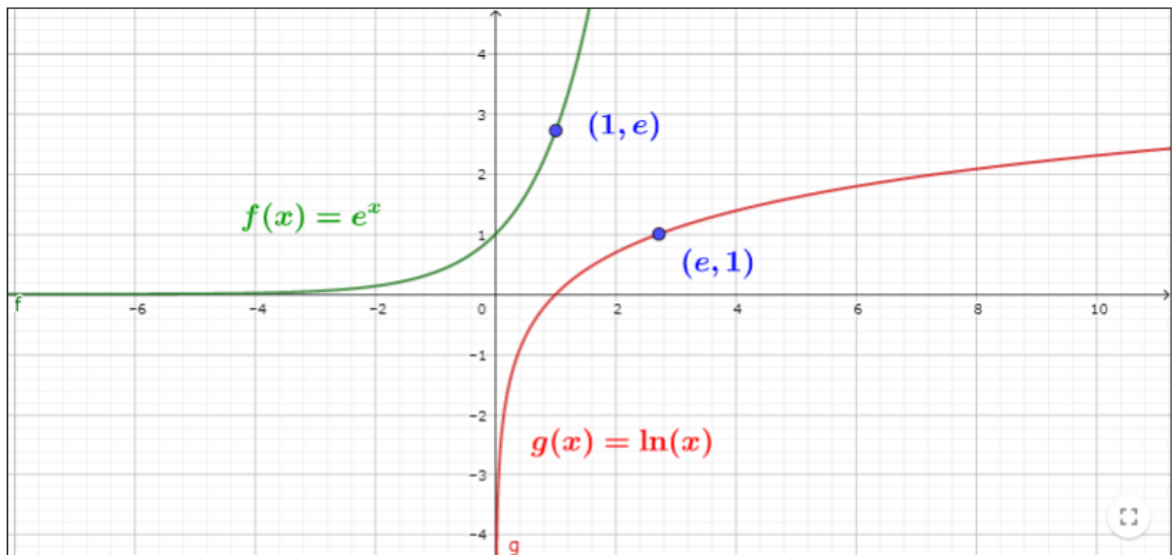


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm>

## 5 Regel van L'Hospital

Bij de berekening van een limiet kunnen volgende onbepaaldheden zich voordoen:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

De regel van L'Hôpital kan onder bepaalde voorwaarden deze onbepaaldheden opheffen.

Onderstel dat de functies  $f$  en  $g$  afleidbaar zijn in een omgeving van  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , behalve in  $a$ , en dat  $g'(x) \neq 0$  in deze omgeving van  $a$ , behalve eventueel in  $a$ .

Voor de eerste twee onbepaaldheden geldt dan volgende formule:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ of } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/D8F7EpY4>

## 6 Rekenregels afgeleide

|   |                             |   |
|---|-----------------------------|---|
| $f(x) = e^x$  | $f'(x) = e^x$               | $(e^\square)' = e^\square \cdot \square'$                       |
| $f(x) = a^x \ (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$ | $f'(x) = a^x \ln a$         | $(a^\square)' = a^\square \ln a \cdot \square'$                 |
| $f(x) = \ln x$  | $f'(x) = \frac{1}{x}$       | $(\ln \square)' = \frac{1}{\square} \cdot \square'$             |
| $f(x) = {}^a \log x$                                  | $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ | $({}^a \log \square)' = \frac{1}{\square \ln a} \cdot \square'$ |

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv>

## 7 Verloop

## 8 Toepassingen

### 8.1 Extremumproblemen

### 8.2 Kettinglijn

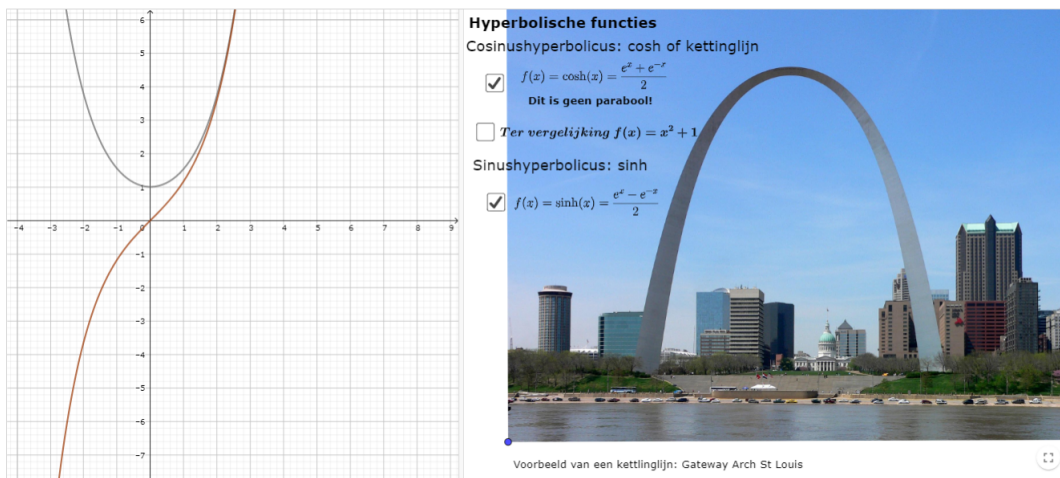


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/d8enj4ud>

## 8.3 Continuïteit

## 9 Groeimodellen

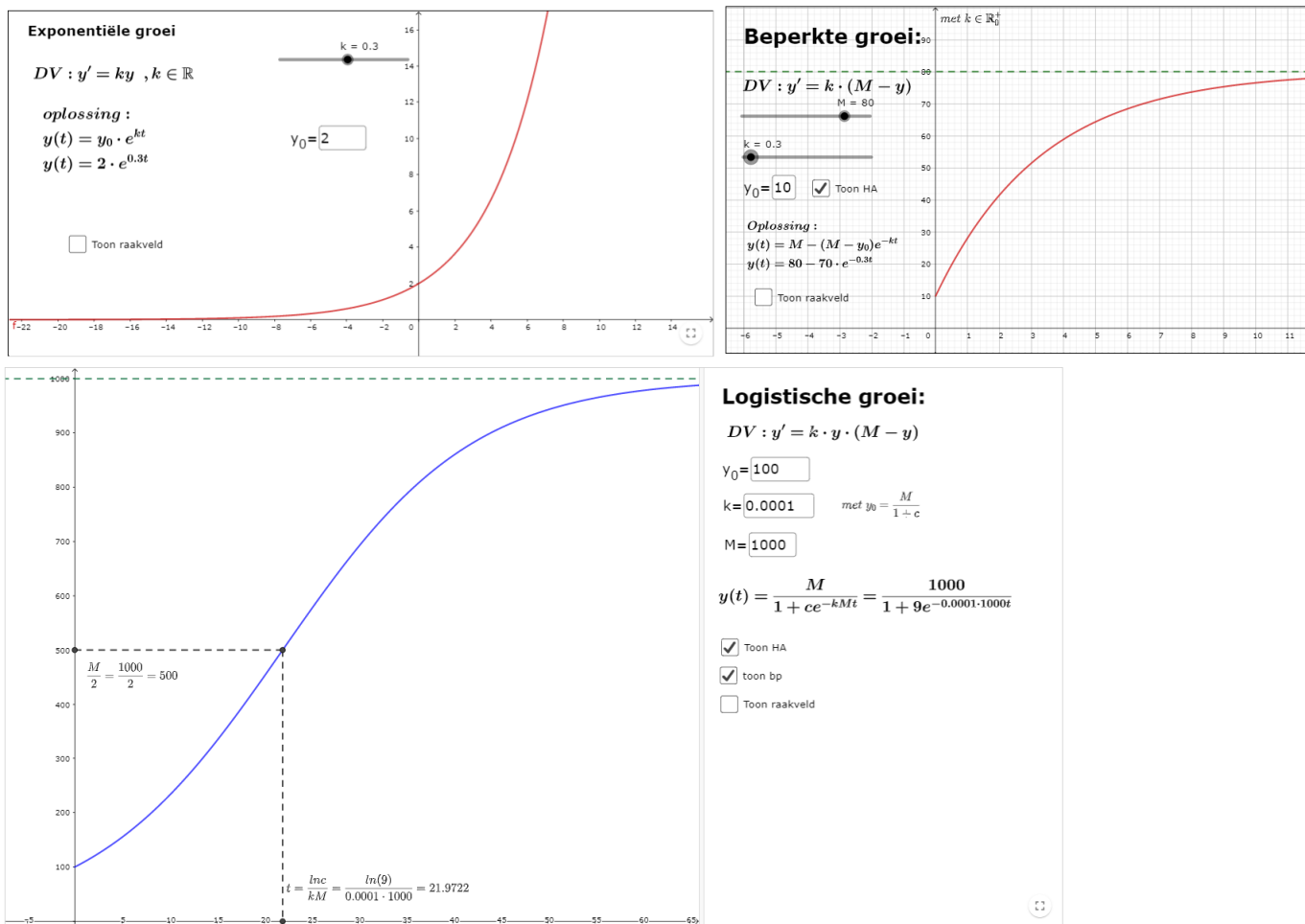


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ> <https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ>

## 10 oefeningen

### 10.1 herhaling

### 10.2 het getal e

1. J of F:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

### 10.3 rekenregels

1. Vereenvoudig:  $e^{2\ln(3)} + \ln(e^2)$
2. los op:  $\ln(4x - 10) - \ln(x - 2) = \ln(x - 1)$
3. los op:  $\ln(x - 3) - \ln 6 = 2\ln 2$

### 10.4 exp en log functies met grondtal e

- 1.

## 10.5 regel van L'Hospital

1. Bereken:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$

## 10.6 rekenregels afgeleide

1. bepaal de afgeleide van de volgende functies

(a)  $f(x) = \log(x^3 + 3^x)$

(b)  $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+7x}$

2. Welke antwoord geeft de afgeleide van  $f(x) = \ln\left(\frac{(x+5)^4}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

(a)  $\frac{4}{x+5} - \frac{x}{x^2+4}$

(b)  $2\left(\frac{1}{x+5} - \frac{2x}{x^2+4}\right)$

(c)  $\frac{\sqrt{x^2+4}}{(x+5)^4}$

(d)  $\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+5} + \frac{8\sqrt{x^2+4}}{x}$

3. De 2020ste afgeleide van  $f(x) = x \cdot e^x$  is

(a)  $(x + 2020)e^x$

(b)  $xe^x + 2020$

(c)  $2020e^x$

(d)  $xe^x$

## 10.7 verloop

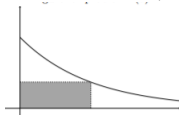
1. Gegeven  $f(x) = 3xe^{2x-10}$

(a) Geef de lineaire benadering bij  $x = 5$

(b) Bepaal de intervallen waar  $f(x)$  stijgend is

## 10.8 toepassingen

1. Bepaal de opp van de grootst mogelijke rechthoek die op volgende manier geconstrueerd wordt met  $f(x) = e^{-x}$



2. Bepaal de waarde van  $a$  zodat volgende functie continu is:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x + e^{x+2}) & x > 0 \\ \operatorname{acosh}(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

## 10.9 groeimodellen

1. Beschouw een groeimodel met beperkte groei (of afname)
  - (a) Geef de differentiaalvergelijking en de oplossing van dit groeimodel
  - (b) Iemand neemt een thermometer mee van binnen naar buiten. Buiten is het  $-15C$  koud. Na één minuut wijst de thermometer  $16C$  aan, na 5 minuten  $-1C$ . Bereken de binnentemperatuur
2. Het aantal fruitvliegjes in een kweekomgeving kan gemodelleerd worden volgens een logistisch groeimodel. Initieel zijn er 4 fruitvliegjes en na 5 dagen is hun aantal al toegenomen tot 23, terwijl er maximaal 230 vliegjes kunnen overleven in de kweekomgeving.
  - (a) Geef de passende differentiaalvergelijking
  - (b) Hoe lang duurt het vooraleer er 180 vliegjes zijn?
  - (c) Bepaal het tijdstip waarop de groeisnelheid het grootst is.
  - (d) Geef een schets waarop je de belangrijkste kenmerken van dit groeimodel aanduidt
3. In een vijver worden 20 vissen uitgezet. De groei van de vispopulatie wordt gegeven door  $P'(t) = 0.0005P \cdot (800 - P)$ . Bepaal het tijdstip waarop er 300 vissen zullen zijn.
4. Een kip wordt vanuit de koelkast ( $6C$ ) wordt in een voorverwarmde oven ( $200C$ ) gezet. Na 20 minuten is de temperatuur van de kip al ( $160C$ ). Geef het functievoorschrift die het temperatuurverloop van de kip in de oven beschrijft.
5. In het TV-programma het lichaam van Coppens voeren Staf en Mathias allerlei experimenten uit. Eén van deze experimenten speelde zich in een diepvriescel bij een temperatuur van  $-30C$ . Staf neemt per ongeluk zijn GSM mee naar binnen. Bij het buitengaan wil hij zijn berichten controleren. Dit lukt pas als de GSM terug opgewarmd is tot  $0C$ . Als de GSM na twee minuten al een temperatuur heeft van  $-25C$ , hoelang duurt het dan vooraleer Staf zijn berichten kan controleren, als je weet dat Staf zich nu in een ruimte met een omgevingstemperatuur van  $20C$  bevindt.
6. Het grote probleem vandaag de dag bij de productie van groene energie (bijv. wind- en zonne-energie is de opslag hiervan. Gelukkig dalen de prijzen van lithiumbatterijen evenredig met de actuele prijs. Op 1 januari 2010 kostte de opslag nog 1000 Euro/kWh, op 1 januari 2016 nog 273 Euro/kWh. Hoeveel maanden zal het nog duren om een aanvaardbare kostprijs voor de particulier van 100 Euro/kWh te halen? (bron <http://blog.zonnepanelen.nl/2016/03/ontwikkeling-van-zonnepanelen>, geraadpleegd op 6/12/2017)

## 11 taken

1. verloop
2. L'Hospital