Die Untersuchung einer Funktion auf Extremstellen, Sattelstellen und Wendestellen.

$f(x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 75x^2$

$f''(x) = 20x^3 - 120x^2 + 150x$

Notwendige Bedingung für eine Extrem- oder Sattelstelle:

$f'(x) = 0$

$5x^4 - 40x^3 + 75x^2 = 0 \quad |$ ausklammern.

$x^2(5x^2 - 40x + 75) = 0 \quad | \; a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$

$x^2 = 0$ oder $5x^2 - 40x + 75 = 0$

$x = 0$ ist eine Lösung

$5x^2 - 40x + 75 = 0 \quad | :5$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad | -15$

$x^2 - 8x = -15 \quad | +\left(\frac{8}{2}\right)^2$

$\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{(x-4)^2} = 1$

$(x-4)^2 = 1 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x - 4 = -1$ oder $x - 4 = 1 \quad | +4$

$x = 3$ oder $x = 5$

Wenn die Funktion f Extrem- oder Sattelstellen besitzt, dann an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$

Weitere Untersuchung mit dem VZWK

x	-1	$x_1 = 0$	1	$x_2 = 3$	4	$x_3 = 5$	10
$f'(x)$	120	0	40	0	-80	0	17500
	$\nearrow$	SP	$\nearrow$	HP	$\searrow$	TP	$\nearrow$
		SP(0|0)		HP(3|108)		TP(5|0)	

$f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 75x^2$

$f'(-1) = 5 \cdot 1 - 40 \cdot (-1) + 75 \cdot 1 = 5 + 40 + 75 = 120$

$f'(1) = 5 \cdot 1 - 40 \cdot 1 + 75 \cdot 1 = 5 - 40 + 75 = 40$

$f'(4) = 5 \cdot 4^4 - 40 \cdot 4^3 + 75 \cdot 4^2$

$= 5 \cdot 256 - 40 \cdot 64 + 75 \cdot 16$

$= 1280 - 2560 + 1200$

$= 2480 - 2560 = -80$

$256 \cdot 5 = 1280$

$64 \cdot 40 = 2560$

$75 \cdot 16$: 750, 450, 1200

$f'(10) = 5 \cdot 10000 - 40 \cdot 1000 + 75 \cdot 100$

$= 50000 - 40000 + 7500$

$= 10000 + 7500 = 17500$

$f(x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$

$f(0) = 0$

$f(3) = 3^5 - 10 \cdot 3^4 + 25 \cdot 3^3$

$= 243 - 10 \cdot 81 + 25 \cdot 27$

$= 243 - 810 + 675$

$= 918 - 810 = \underline{\underline{108}}$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$3^4 = 3 \cdot 27 = 81$

$3^5 = 3 \cdot 81 = 243$

$675 + 243 = 918$

$25 \cdot 27 =$ 50, 175, 675

$f(5) = 5^5 - 10 \cdot 5^4 + 25 \cdot 5^3$

$= 3125 - 10 \cdot 625 + 25 \cdot 125$

$= 3125 - 6250 + 3125 = \underline{\underline{0}}$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$5^4 = 125 \cdot 5 = 625$

$5^5 = 625 \cdot 5 = 3125$

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt:

$f''(x) = 0$

$20x^3 - 120x^2 + 150x = 0 \quad |$ ausklammern

$x \cdot (20x^2 - 120x + 150) = 0 \quad | \; a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

$x = 0$ oder $20x^2 - 120x + 150 = 0 \quad | :20$

$x^2 - 6x + \frac{15}{2} = 0 \quad | -\frac{15}{2}$

$x^2 - 6x = -\frac{15}{2} \quad | +\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} = \frac{3}{2}$

$(x-3)^2 = \frac{3}{2} \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x - 3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ oder $x - 3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad | +3$

$x = 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}$ oder $x = 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}$

$(x \approx 1{,}7753 \vee x \approx 4{,}2247)$

Wenn die Funktion f Wendepunkte besitzt, dann an den Stellen 0, $3 - \sqrt{\frac{3}{2}}$, $3 + \sqrt{\frac{3}{2}}$. Die Stelle 0 muss nicht mehr untersucht werden, da an der Stelle $x_1 = 0$ bereits ein Sattelpunkt bestimmt wurde. Sattelpunkte sind Wendepunkte mit Steigung 0

Weitere Untersuchung mit dem VZWK

x	$x_1 = 0$	1	$x_2 = 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}$	2	$x_3 = 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}$	10
$f''(x)$	—	50	0	-20	0	9500
		$\nearrow$	Wendepunkt mit lokal maximaler Steigung	$\searrow$	Wendepunkt mit lokal minimaler Steigung	$\nearrow$

$WP\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \,\middle|\, 58{,}1799\right)$

$WP\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \,\middle|\, 46{,}3201\right)$

$f''(x) = 20x^3 - 120x^2 + 150x$

$f''(1) = 20 \cdot 1^3 - 120 \cdot 1^2 + 150 \cdot 1$

$= 20 - 120 + 150 = 50$

$f''(2) = 20 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2^2 + 150 \cdot 2$

$160 - 480 + 300 = -20$

$f''(10) = 20 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^2 + 150 \cdot 10$

$= 20000 - 12000 + 1500$

$= 8000 + 1500 = 9500$