

8.1.1&8.1.2 向量的概念与向量的加法和减法

一、教材分析

《向量的概念》和《向量的加法和减法》是沪教版必修二第八章向量的概念和线性运算前两节的内容。该部分内容学生在初中阶段已经进行了学习，在高中阶段将继续进行巩固和拓展，为后续向量的数量积和坐标表示等内容学习做铺垫。

《向量的概念》一节重在讨论向量的两要素和向量的表示方法。从向量的两要素继续引出对于向量的大小和向量间的关系的讨论。对于向量的大小，引出向量的模、零向量、单位向量等关键概念；对于向量间的关系，引出向量平行、向量相等和负向量等概念。

《向量的加法和减法》一节从高中物理学习过的力的合成出发，引出向量相加的平行四边形法则和三角形法则。再通过类比实数的加法运算律，得出并验证加法的交换律。继而类比向量的加法，给出向量的减法的定义。

二、学情分析

学生在初中阶段的数学学习中已经学习了向量的概念以及向量的加减法的相关内容，在初中阶段的物理学习中了解了力是矢量，也掌握了力在同向或反向时的合成与应用。基于此，本节课重在对学生初中向量知识的巩固和加强，并将结合高中物理所学过的位移、力等内容，从物理的角度对向量加法的平行四边形法则、三角形法则进行阐释。

三、教学目标

1. 学生理解向量和向量模的概念，掌握向量的表示方法，了解零向量、单位向量、平行向量、相等向量、负向量的定义。
2. 学生结合物理学中的实例形成向量加法的平行四边形和三角形法则，能熟练进行向量的加法运算。
3. 类比实数的加法运算律猜想并验证向量加法的运算律，培养逻辑推理核心素养。
4. 类比实数的减法运算得出向量的减法运算，理解向量的减法可以转化为向量的加法，能熟练进行向量的减法运算。

四、教学重难点

重点：向量的加减法运算。

难点：对向量加减法定义的理解。

五、教学过程

（一）向量概念复习

【问题1】如果把以下这些物理量进行分成两类，你会怎么分类呢？依据是什么？

重力，速度，加速度，摩擦力，电压，温度，密度，位移，拉力，电阻。

进而引导学生回顾向量和标量的概念。

向量的概念：既有大小，又有方向的量。

标量的概念：仅有数值而没有方向的量。

并设置追问：

Q：向量该如何表示呢？

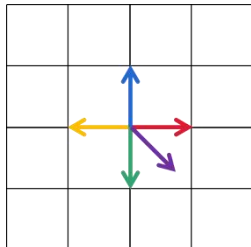
A：向量可以用有向线段来表示，线段的长度就是向量的大小，线段的方向表示向量的方向。有向线段的起点就是向量的起点，有向线段的终点就是向量的终点。我们可以用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示向量，其中 A 为起点， B 为终点。也可以用上方加箭头的小写字母来表示，如 $\vec{a}$ 。

Q：向量的大小我们如何定义呢？

A: 向量 $\vec{a}$ 的大小叫做 $\vec{a}$ 的模, 记作 $|\vec{a}|$.

继而给出单位向量和零向量的概念:

我们定义模为 1 的向量叫做单位向量; 在如图所示的单位正方形组成的网格中, 以下这些向量均为单位向量, 当这些向量共起点时, 他们的终点落在如图所示的单位圆上。



规定模为 0 的向量为零向量, 记作 $\vec{0}$, 可认为它具有任意方向。

【辨析】所有的单位向量都相等吗?

上面我们是从向量大小的角度研究了特殊的向量, 接下来我们研究两个向量之间的关系。

【问题 2】你还记得初中时学过向量间的哪些关系呢? (位置关系大小关系都可以)

通过引导学生对向量的方向、大小进行思考。引出平行向量、相等向量、负向量。

平行向量: 如果两个非零向量所在的直线平行或重合, 那么称这两个向量平行。记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 表示 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行。

【辨析】(1) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反?

(2) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$?

相等向量: 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同方向且具有相等的模, 根据向量的定义, 它们就是同一个向量, 我们常常称它们是相等的向量。特别地, 一个向量平移后得到的向量与原来的向量相等, 因此, 用有向线段表示向量时, 可以任意选取有向线段的起点。

我们规定, 所有的零向量都相等。

【辨析】“ $\vec{a} = \vec{b}$ ”的充要条件是“ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”。

负向量: 如果一对平行向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 具有相等的模但方向相反, 那么称它们互为负向量, 或称 $\vec{b}$ 为 $\vec{a}$ 的负向量, 记作 $\vec{b} = -\vec{a}$ 。一般的, 对于平面上的任意两点 A、B, 均有 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ 。

因为 $\vec{0}$ 模长为 0, 并且认为它具有任意方向, 因此 $\vec{0}$ 的负向量为它本身。

【设计意图】学生在初中阶段已经对向量的概念有了较为熟练的掌握, 因此通过提问的方式引导学生回忆并说出相关知识, 以进行复习巩固, 为后续向量线性运算的学习铺垫。

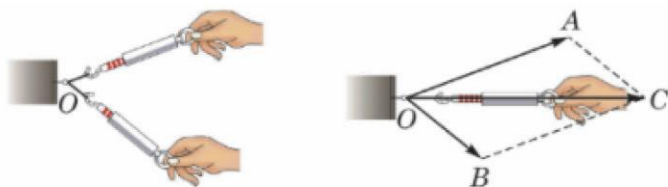
(二) 向量的加法和减法

我们已经对向量的概念有了一定的研究, 那接下来我们来研究向量的运算。在实数运算

中，我们是先研究了加法，于是在向量中我们也先研究加法。

【思考】在高中物理的学习中，我们也接触了许多矢量相加的计算。例如当我们已经知道了当不在同一方向上的两个力 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 同时作用于一个物体时，它们的合力该如何计算？

预设学生回答：做平行四边形，对角线即是合力。



一般地，向量的加法采用物理中求合力的方法：设给定两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，如果以点 O 为起点，分别作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，那么以 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线所表示的向量 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 就定义为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 。求向量和的运算，叫做向量的加法，我们把这种作向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

追问：观察平行四边形 $OACB$ ，有没有和 $\vec{b}$ 相等的向量呢？

引出向量加法的三角形法则。

追问：你能否找到一个向量加法的三角形法则对应的现实模型呢？

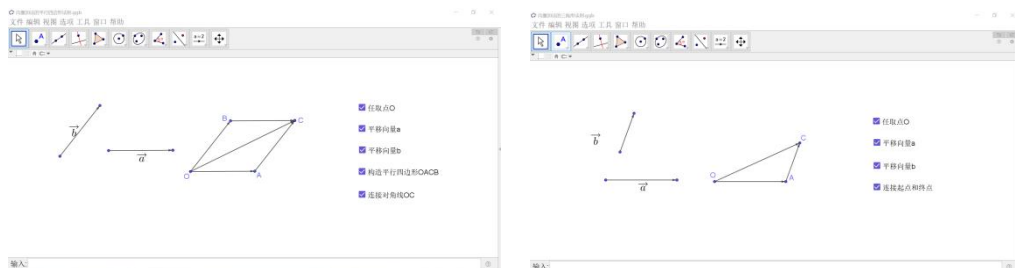
引导学生发现位移的合成。

【问题3】请指出向量加法的平行四边形法则和三角形法则的各自特征

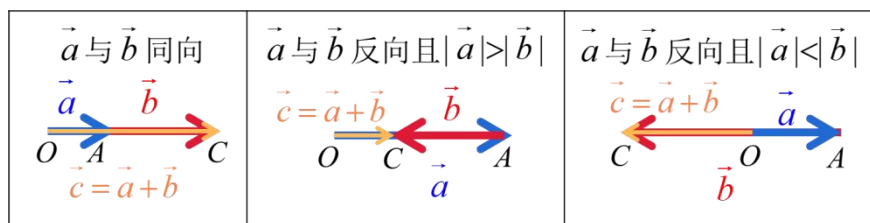
答案：向量加法的平行四边形法则的特征是起点相同；向量加法的三角形法则的特征是首尾相接。

【练习】请同学们任意画出两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，尝试画出向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 。并考虑对于任意的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，平行四边形法则和三角形法则是否都适用？

随后用 GeoGebra 展示讲解并总结。



注意重点关注 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 平行时的情况。



特别地，当三个向量中出现一个零向量，就得出：

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \text{和} \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

【设计意图】通过 GeoGebra 来演示平行四边形法则和三角形法则，帮助学生更加直观、形象地掌握向量相加的方法。

【问题 4】回顾实数的加法运算有哪些运算律？能否类比写出向量加法的运算律？引导学生类比写出，并画图证明，之后用练习题引导学生思考数学证明。

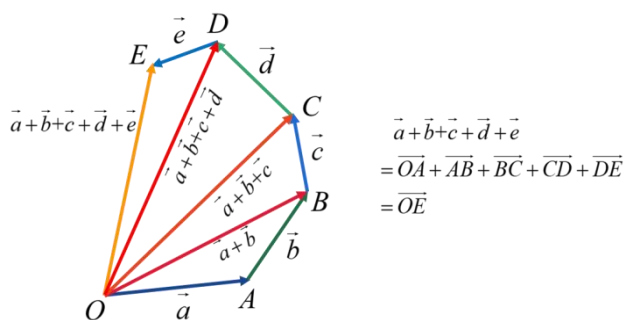
【练习】已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 是平面上任意给定的向量，求证 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ 。

学生独立思考，之后拿同学的上黑板上投影展示。在展示的过程中：

提问：当两个向量相加时，其和是以第一个向量的起点为起点，第二个向量的终点为终点；三个向量相加时，也是以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点；你能总结出什么规律吗？

预设学生发现如果用向量的起点和终点来表示一个向量，多个向量相加时，得到的向量的和是以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点的向量。这就是向量加法的首尾规则。

给出首尾规则的概念后，再展示图片。



研究了向量的加法，我们自然要研究向量的减法。

【问题 5】你能根据向量的加法，类比实数的减法，给出向量减法的定义吗？

向量的减法定义：如果已知向量 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ，那么向量 $\vec{b}$ 叫做向量 $\vec{c}$ 与向量 $\vec{a}$ 的差，记作

$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$ 。求向量差的运算，叫做向量的减法。

追问：向量减法有什么几何意义吗？

向量的减法的几何意义：根据三角形法则可以发现，两个共起点的向量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 相减时得到的 $\vec{c} - \vec{a}$ 为：从向量 $\vec{a}$ 的终点指向向量 $\vec{c}$ 的终点的向量。

【问题 6】我们在进行标量的运算时知道，减法是统一表示为加法的。那么 $\vec{c} - \vec{a}$ 能否转化成加法呢？

预设同学能答出 $\vec{c} - \vec{a} = \vec{c} + (-\vec{a})$ 。

追问：上述等式如何证明？

分析：根据定义，要证明 $\vec{c} - \vec{a} = \vec{c} + (-\vec{a})$ ，也就是要证明向量 $\vec{c} + (-\vec{a})$ 是 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 相减时得到的向量，根据向量减法的定义，即证明 $\vec{c} + (-\vec{a})$ 与 $\vec{a}$ 的和为 $\vec{c}$ 。

证明：事实上 $\vec{c} + (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{c} + [(-\vec{a}) + \vec{a}] = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$ 。因此 $\vec{c} - \vec{a} = \vec{c} + (-\vec{a})$ 成立。

这样，我们就实现了将向量的加法和减法都统一成了加法运算，因此在今后的计算中，就算遇到减法，也可以先转换为加法，再结合加法的运算律来解决问题。

【练习】已知两个向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，尝试画出向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 。（给出学生一组共起点与一组不共起点的向量）

两种方法：一种是从被减向量的终点指向减向量的终点，另一种是换成加法来计算。

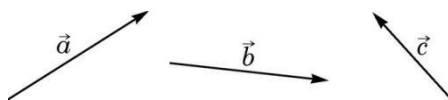
【设计意图】运用向量加法类比得到向量减法的运算方法以及公式，培养学生的逻辑推理能力和类比、转化能力。

（三）练习巩固

1. 如图，已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，作出下列向量：

(1) $\vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{b} + \vec{c}$ ， $\vec{a} + \vec{c}$ ；

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ 和 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ 。



2. 化简下列向量运算：

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ ；

(2) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})$ ；

(3) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DM})$ 。

3. 设向量 $\vec{a}$ 表示“向东走 2 km”；向量 $\vec{b}$ 表示“向西走 1 km”；向量 $\vec{c}$ 表示“向南走 2 km”；

向量 $\vec{d}$ 表示“向北走 1 km”。试说明下列向量所表示的意义：

(1) $\vec{a} + \vec{a}$ ；

(2) $\vec{a} + \vec{c}$ ；

(3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$;

(4) $\vec{c} + \vec{d} + \vec{c}$.

4. 设向量 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 12$, $|\overrightarrow{OB}| = 4$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$.

5. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 求:

(1) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$;

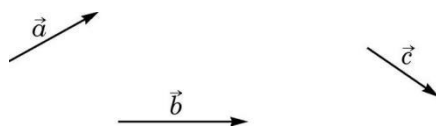
(2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}|$;

(3) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}|$.

6. 如图, 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$, 作出下列向量:

(1) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ 和 $\vec{a} + (\vec{c} - \vec{b})$;

(2) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$ 和 $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$.



7. 试用作图法验证下列不等式:

(1) $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

(2) $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

[能力拓展]

1. 若点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点,

且满足 $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})|$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.

2. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值.

(四) 总结反思

引导学生自己进行总结:

《向量概念》: 向量的概念、向量的几何表示和符号表示、向量的模、零向量、单位向量、向量平行、向量相等、负向量

《向量的加法和减法》: 向量的加法及其平行四边形法则和三角形法则, 向量加法的运算律, 向量减法及其几何表示

最后教师进行总结。