

Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 7 - determinar si una matriz admite inversa por el método de Gauss

1. ¿Para qué valores de a no admite inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$?

Obtenemos la matriz triangular por Gauss para saber cuántos vectores linealmente independientes hay, como máximo, en la matriz. Si hay 3 vectores linealmente independientes, el rango será 3 y la matriz tendrá inversa.

- $$\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Reordeno y coloco } F_3 \text{ como primera fila} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$
- $$\rightarrow F'_3 = (a-3)F_3 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & -2a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Discusión de casos:}$$
- Si $-2a+2=0 \rightarrow a=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 2$
 - El caso $a-3=0$ no lo contemplo en la matriz final porque anula la transformación $F'_3 = (a-3)F_3 - F_2$. Debemos sustituir $a=3$ en la matriz previa a la operación no permitida $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{intercambiando Filas 2 y 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 3$
 - Si $a=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - 3F_1 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Su rango es 2}$
 - Caso complementario: $a \neq 0, 1 \rightarrow \text{Rango 3 en la matriz final}$

Conclusión: Si $a=1$ o $a=0$ la matriz no admite inversa.