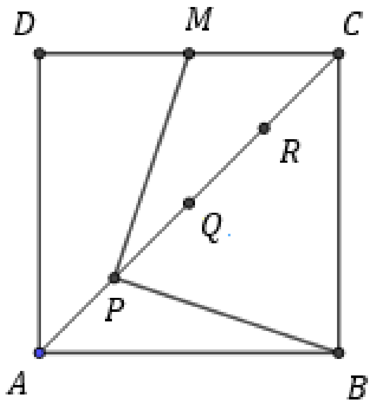
Fábio Vinícius Silva dos Santos

Exercício proposto 1.

- Faça uma construção no geogebra.
- Explore a figura e formule conjecturas.
- Elabore uma solução detalhada formal para o que é solicitado.

Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado, M é ponto médio do lado CD e os pontos P, Q e R dividem a diagonal AC em quatro partes iguais.
(a) Determine a medida do ângulo $B\widehat{P}M$.
(b) Mostre que os segmentos BP e PM possuem o mesmo comprimento.
(c) Mostre que os pontos B, C, M e P pertencem a uma circunferência.
(d) Mostre que essa circunferência passa pelo ponto médio do lado AB.



Solução: Para a solução dos itens deste exercício, vamos considerar que A seja o ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas OXY onde $AB \in OX$, $AD \in OY$ e que $AB = 4l$ com $l \in R_+^*$. Sendo assim, temos que, $B = (4l; 0)$, $C = (4l; 4l)$, $D = (0; 4l)$, $M = (2l; 4l)$, $AC = 4l\sqrt{2}$, pois AC é diagonal do quadrado ABCD com $AP = l\sqrt{2}$ e $P = (l; l)$. Usando o conceito de vetores da geometria analítica, podemos dizer que $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = (3l; -l)$ com $|\vec{v}| = \sqrt{9l^2 + l^2} = l\sqrt{10}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{PM} = (l; 3l)$ com $|\vec{u}| = \sqrt{l^2 + 9l^2} = l\sqrt{10}$.

(a) Seja α a medida do ângulo $B\hat{P}M$ com $cos\alpha = \frac{<v,u>}{|v|\cdot|u|} = \frac{3l^2 - 3l^2}{l\sqrt{10}\cdot l\sqrt{10}} = \frac{0}{10l^2} = 0$ então, $\alpha = 90°$. ■

(b) Seja $PB = |\vec{v}|$ com $|\vec{v}| = l\sqrt{10}$ e $PM = |\vec{u}|$ com $|\vec{u}| = l\sqrt{10}$ então, $PB = PM$ pois $|\vec{v}| = |\vec{u}|$. ■

(c) Seja $BM = 2l\sqrt{5}$ a hipotenusa do triângulo BPM retângulo em P, podemos afirmar que BM é o diâmetro da circunferência c_1 de centro $O_1 = (3l; 2l)$, onde O_1 é o ponto médio do segmento BM, com $\{B, M, P\} \subset c_1$.
Se r é o raio de c_1 com $r = d(C; O_1) = d(B; O_1) = d(M; O_1) = d(P; O_1) = \frac{BM}{2} = l\sqrt{5}$ então, $C \in c_1$. ■

(d) Seja N é o ponto médio do segmento AB com $N = (2l; 0)$ e $d(N; O_1) = \sqrt{l^2 + 4l^2} = l\sqrt{5} = d(B, O_1) = r$ então, $N \in C_1$. ■

Veja a seguir a construção (Figura 1) e o protocolo de construção (Tabela 1) do exercício proposto 1 da atividade 5 do ciclo 2.

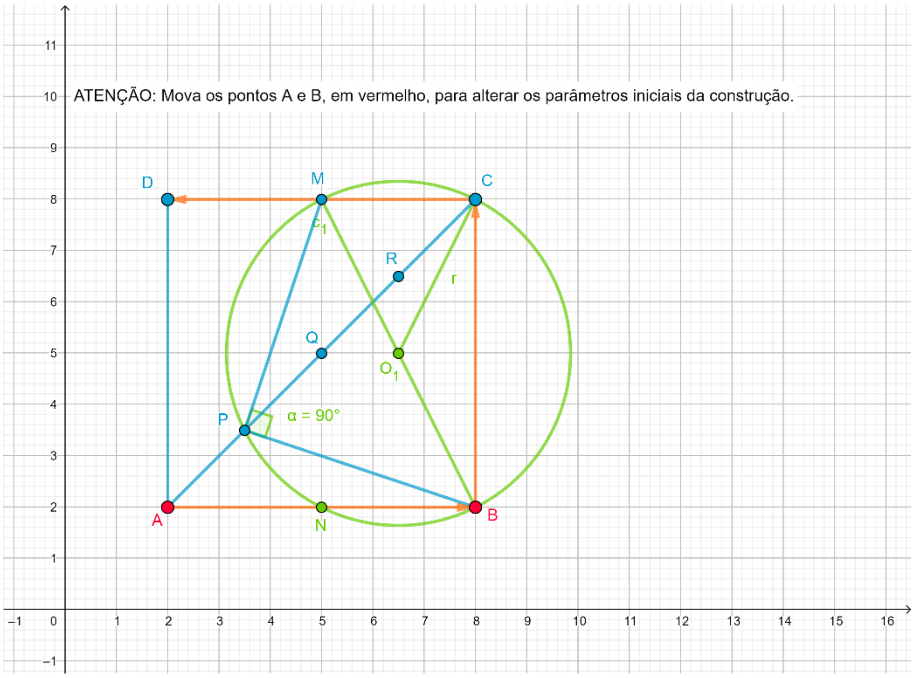


Figura 1: Construção do exercício proposto 1 no Geogebra.

Nome	Definição	Valor
Ponto A		$A = (2, 2)$
Ponto B		$B = (8, 2)$
Vetor AB	Vetor(A, B)	$AB = (6, 0)$
Vetor BC	VetorPerpendicular(Transladar(AB, B))	$BC = (0, 6)$
Ponto C	Ponto(BC)	$C = (8, 8)$
Vetor CD	VetorPerpendicular(Transladar(BC, C))	$CD = (-6, 0)$
Ponto D	Ponto(CD)	$D = (2, 8)$
Segmento DA	Segmento(D, A)	$DA = 6$
Ponto M	PontoMédio(C, D)	$M = (5, 8)$
Segmento AC	Segmento(A, C)	$AC = 8.49$
Ponto Q	PontoMédio(A, C)	$Q = (5, 5)$
Ponto P	PontoMédio(A, Q)	$P = (3.5, 3.5)$
Ponto R	PontoMédio(Q, C)	$R = (6.5, 6.5)$
Segmento PB	Segmento(P, B)	$PB = 4.74$
Segmento PM	Segmento(P, M)	$PM = 4.74$
Orientação		"ATENÇÃO: Mova os pontos A e B, em vermelho, para alterar os parâmetros iniciais da construção."
Ângulo	Ângulo(B, P, M)	$\alpha = 90°$
Segmento BM	Segmento(B, M)	$BM = 6.71$
Ponto $O_1(6.5, 5)$	PontoMédio(M, B)	$O1 = (6.5, 5)$
Círculo c_1	Círculo(O_1, C)	$c1: (x - 6.5)^2 + (y - 5)^2 = 11.25$
Segmento r	Segmento(O_1, C)	$r = 3.35$
Ponto N	PontoMédio(A, B)	$N = (5, 2)$

Tabela 1: Protocolo de construção do exercício proposto 1 no Geogebra.