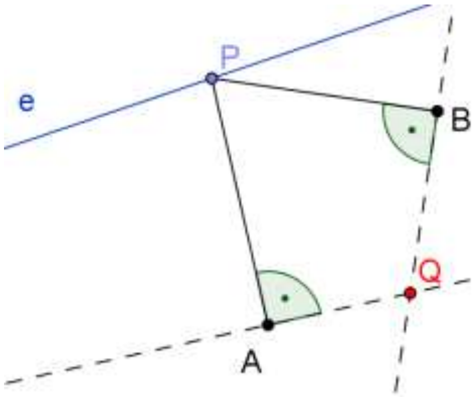
Egy probléma és utóélete IV.



Szilassi Lajostól származik a következő probléma:
Adott két pont *A* és *B.* A sík minden *P* pontjához rendeljük azt a *Q* pontot, melye $PA \perp QA$ és $PB \perp QB$. Mi a *Q* pontok halmaza, ha *P* végigfut egy egyenesen?
Megjelentettük a problémát a Sulinet-en. Az olvasók közül többen küldtek be sejtéseket, ezek megadása jelentősen könnyebbé vált, mert akkor már rendelkezésre álltak a dinamikus geometriai programok. Az olvasók azt sejtették, hogy a keresett ponthalmaz parabola vagy hiperbola.

Teljes megoldást **Csiba Péter** küldött, aki akkor a nyitrai Konstantin Egyetemen dolgozott. Dolgozatában projektív geometriai és analitikus geometriai módszerrel vizsgálta a problémát.
Természetes, hogy a kitűzőnek, Szilassi Lajosnak is volt egy megoldása. Nézzük meg most azt.

Ha $P \in e(A, B)$, akkor nincs képe, hiszen a két egyenes nem metszi egymást.

Szorítkozzunk most már a $P \notin e(A, B)$ esetre!
Ekkor igalak a következők:

1) Ha *PB* ⊥ *AB* akkor *Q=A*, ugyanígy ha *PA* ⊥ *AB* akkor *Q=B*.

2) A *Q* pont ugyanolyan távolságra van az *A* és *B* pont tükörtengelyétől, mint *P*, ugyanis

   legyen $A(1;0), B(-1;0), P(p_1;p_2), (p_2 \neq 0), Q(q_1;q_2)$! Ekkor$\overrightarrow{PA}(1-p_1;-p_2)$, $\overrightarrow{QA}(1-q_1;-q_2)$, $\overrightarrow{PB}(-1-p_1;\ -p_2), \overrightarrow{QB}(-1-q_1;\ -q_2)$.
   $$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{QA} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QA} = 0 \Rightarrow (1-p_1)(1-q_1) + p_2q_2 = 0 \qquad (1)$$
   $$\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{QB} \Rightarrow \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QB} = 0 \Rightarrow (-1-p_1)(-1-q_1) + p_2q_2 = 0 \qquad (2)$$
   Kivonva a (2)-ből az (1)-et:
   $$1 + p_1 + q_1 + p_1q_1 - 1 + p_1 + q_1 - p_1q_1 = 0,$$
   amiből $q_1 = -p_1$.

3) $BT_PP\ \Delta \sim QT_QB_\Delta$ ahol T_P a *P* pontnak T_Q a Q-nak az *e(AB)*-re eső merőleges vetülete (merőleges szárú szögek).

4) Tekintsük az (1), (2) egyenletrendszert!
   $$(1-p_1)(1-q_1) + p_2q_2 = 0 \qquad (1)$$
   $$\underline{(-1-p_1)(-1-q_1) + p_2q_2 = 0 \qquad (2)}$$
   Az 1)-ben kaptuk, hogy $q_1 = -p_1$. Helyettesítsük ezt az (1) egyenletbe!
   $$(1-p_1)(1+p_1) + p_2q_2 = 0$$
   $$1 - {p_1}^2 + p_2q_2 = 0$$
   $$q_2 = \frac{{p_1}^2 - 1}{p_2}$$

A 4) megállapítás alapján, ha a *P* pont végigfut az általános helyzetű $y = mx + b$ egyenletű egyenesen, akkor a *Q* pont az $y = \frac{x^2-1}{mx+b}$ egyenletű ponthalmazon mozog.

Ha *m*=0, vagyis az egyenes párhuzamos *AB*-vel, akkor a kapott görbe egyenlete:

$$y = \frac{x^2 - 1}{b},$$

amiről tudjuk, hogy parabola egyenlete.

Az viszont a középiskolás szintet meghaladó állítás, hogy az $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ alakú függvények grafikonja hiperbola. Ha a *P* pont pályája az *x* tengelyre merőleges, *A*-ra és *B*-re nem illeszkedő egyenes, akkor a *Q* pontok mértani helye ennek az y tengelyre vonatkozó tükörképe, kivéve ennek az x tengellyel alkotott metszéspontját.