Problemas sobre continuidad en funciones a trozos y límite

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Estudia los límites laterales de $f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{x+1 \ \ si \ \ x\le 1} \\ \boldsymbol{3x^2-1 \ \ si \ \ x>1} \end{cases}$ **en el punto** $\boldsymbol{x_0=1}$**.**

Realizamos el límite lateral por la izquierda. Recuerda que, en un primer paso, calcular el límite es simplemente evaluar la función en el punto.

$L^- = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 1+1 = 2 \rightarrow$ Fíjate que L^- significa límite por la izquierda.

$L^+ = \lim_{x\to 1^+}(3x^2-1) = 3-1 = 2 \rightarrow$ Fíjate que L^+ significa límite por la derecha.

Como los límites laterales en $x_0 = 1$coinciden, podemos afirmar que existe el límite de la función en $x_0 = 1$ y su valor es:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = L = 2$

PROBLEMA 2

Estudia los límites laterales de $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si\ \ x > 0 \end{cases}$ **en el punto** $x_0 = 0$**.**

Evaluamos en la función.

$L^{-} = \lim_{x \to 0^{-}} (x+1) = 0 + 1 = 1$

$L^{+} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty \rightarrow$ ¿Qué hacemos? ¿Se puede dividir por 0?

No estamos dividiendo por 0, sino por un valor muy próximo a 0 pero sin llegar a tocarlo (recuerda el concepto de “tender” que hemos explicado en clase). Un número (en nuestro caso tenemos 1 en el numerador) dividido por algo muy, muy, muy pequeño (un valor a la derecha de 0) tiende a algo muy, muy, muy grande (más infinito).

PROBLEMA 3

Estudia la continuidad de la función en $x = 2$.

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & si \;\; x \neq 2 \\ 3 \;\; si \;\; x = 2 \end{cases}$$

Ojo con la forma en que está expresa esta función a trozos. Tanto a la izquierda como a la derecha de 2, la ecuación de la función es el cociente de polinomios. Y solo cuando la variable x vale 2, la ecuación de la función es la recta horizontal $f(x) = 2$.

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$\exists f(2) = 3$

Segunda condición: límites laterales iguales.

Dada la forma en que está definida la función a trozos, la expresión del límite por la izquierda va a coincidir con la expresión del límite por la derecha, ya que ambos límites se aplican sobre la misma ecuación para la función: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Empecemos por el límite lateral izquierdo.

$L^- = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → Factorizar y simplificar.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = volver\ a\ evaluar = 4 \to L^- = 4$

Si hacemos el límite lateral derecho, llegaremos al mismo resultado → $L^+ = 4$

En consecuencia:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 = L$

Si comparamos el valor de la función en el punto frontera con el valor del límite, comprobamos que no coinciden.

$f(2) = 3 \neq 4 = L$

Estamos ante una discontinuidad evitable en $x = 2$.

PROBLEMA 4

Indica el valor de k para que la función:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{3x}{2x-2} & si\ x \neq \frac{1}{2} \\ k\ si\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x = \frac{1}{2}$.

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$$\exists f\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

Segunda condición: límites laterales iguales.

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{3x}{2x-2} = evaluar = \frac{-3}{2} \to L^- = \frac{-3}{2}$$

Por la forma de la función a trozos, la expresión del límite lateral derecho coincide con la expresión del límite lateral izquierdo.

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x}{2x-2} = evaluar = \frac{-3}{2} \to L^+ = \frac{-3}{2}$$

$$L^- = L^+ = L = \frac{-3}{2}$$

Según la tercera condición, el valor de la función en el punto debe coincidir con el valor del límite.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = k, L = \frac{-3}{2} \to f\left(\frac{1}{2}\right) = L \to k = \frac{-3}{2}$$

PROBLEMA 5

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = \infty \to$ Calculamos límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = evaluar = \frac{27+18-9}{27+36+3-6} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

PROBLEMA 6

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{1+2-3}{1+4+1-6}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x)}{(x-1)(x^2+5x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6}=\frac{1+3}{1+5+6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{-27+18+9}{-27+36-3-6}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-x)}{(x+3)(x^2+x-2)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{9+3}{9-3-2}=\frac{12}{4}=3$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}=\frac{\sqrt{9}-3}{3-3}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}$$

Operar numerador.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{-1}{\sqrt{9}+3}=\frac{-1}{6}$$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}=\frac{2\cdot 4-8}{\sqrt{25}-5}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}\to$ Operar denominador

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)}\to$ Operar numerador

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)}=\frac{2(\sqrt{25}+5)}{4+4}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(3-\sqrt{2x^2+1})(3+\sqrt{2x^2+1})}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}\to$ Operar numerador

$$\lim_{x\to 2}\frac{9-(2x^2+1)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+8}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x^2-4)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2(x+2)(x-2)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}\to$ Operar denominador

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2(x+2)(x-2)}{3(x-2)(3+\sqrt{2x^2+1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x+2)}{3(3+\sqrt{2x^2+1})}=\frac{-2(2+2)}{3(3+\sqrt{2(2)^2+1})}=\frac{-8}{18}=\frac{-4}{9}$$

PROBLEMA 7

Resuelve:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+6}{3x^3-x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty} \to$ Indeterminación

Cociente de polinomios del mismo grado.

Divido todo por la máxima potencia.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2/x^2-3x/x^2+2/x^2}{2x^2/x^2+x/x^2-1/x^2} \to$ simplifico $\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5-3/x+2/x^2}{2+1/x-1/x^2}$

Evalúo recordando que $k/\infty = 0 \to \frac{5-3/\infty+2/\infty}{2+1/\infty-1/\infty} = \frac{5-0+0}{2+0-0} = \frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+6}{3x^3-x+5} = \frac{+\infty}{+\infty} \to$ Indeterminación

Grado del numerador menor que el Grado del denominador.

Divido todo por la máxima potencia.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x/x^3+6/x^3}{3x^3/x^3-x/x^3+5/x^3} \to$ simplifico $\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2/x^2+6/x^3}{3-1/x^2+5/x^3}$

Evalúo recordando que $k/\infty = 0 \to \frac{2/\infty+6/\infty}{3-1/\infty+5/\infty} = \frac{0}{3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{\infty}{\infty} \to$ Indeterminación

El mayor grado que aparece en el cociente es x^2, porque el factor x^4 dentro de la raíz cuadrada se comporta como un polinomio de grado 2.

Divido todo por la máxima potencia. Cuando x^2 entra dentro de la raíz cuadrada, lo hace como x^4.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x^2/x^2-x/x^2}{\sqrt{169x^4/x^4-x^2/x^4+8/x^4}} \to$ simplifico $\to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13-1/x}{\sqrt{169-1/x^2+8/x^4}}$

Evalúo recordando que $k/\infty = 0 \to \frac{13-1/\infty}{\sqrt{169-1/\infty+8/\infty}} = \frac{13-0}{\sqrt{169-0+0}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$

PROBLEMA 8

Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)=1-1=0$$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador, por lo que el resultado es el cociente de los coeficientes que acompañan a las máximas potencias.

PROBLEMA 9

Sea $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$. Estudia la continuidad en $x = -1$ y en $x = 5$. Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x = -1$.

$\nexists f(-1)$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x = -1$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x = 5$.

$\nexists f(5)$

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \lim_{x\to 5^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5} = \frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x = 5$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1. Por lo que el límite coincide con el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia.

PROBLEMA 10

Estudia la continuidad de la función en $x = -2$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 2 \;\; si \;\; x < -2 \\ -x^2 + 6 \;\; si \;\; -2 \le x \le 3 \\ 1 \;\; si \;\; x > 3 \end{Bmatrix}$$

$\exists f(-2) = -(-2)^2 + 6 = -4 + 6 = 2$

$\lim_{x \to -2^-} 2 = 2$

$\lim_{x \to -2^+} (-x^2 + 6) = 2$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 2 = L$

$f(-2) = 2 = L$

Función continua en $x = -2$

$\exists f(3) = -(3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3$

$\lim_{x \to 3^-} (-x^2 + 6) = -3$

$\lim_{x \to 3^+} 1 = 1$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -3 \neq 1 = \lim_{x \to 3^+} f(x)$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x = 3$

PROBLEMA 11

Determina a y b para que la función sea continua en los puntos frontera.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \;\; si \;\; x < 0 \\ a\,x + b \;\; si \;\; 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \;\; si \;\; x > 3 \end{cases}}$$

La función es continua en $x = 0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(0) = a \cdot 0 + b = b$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b$

Límites laterales iguales $\rightarrow b = 1 \rightarrow$ Existe el límite y vale $L = 1$

$f(0) = 1 = L$

La función es continua en $x = 3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(3) = a \cdot 3 + b = 3a + 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (ax + b) = 3a + 1$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 6$$

Límites laterales iguales $\rightarrow 3a + 1 = 6 \rightarrow a = \frac{5}{3}$

$f(3) = 6 = L$

PROBLEMA 12

Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & si \ x \neq 1 \ y \ x \neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & si \ x = 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$\exists f(1) = -\sqrt{2k+1}$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación $\to \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \to$ Es el mismo límite de antes $\to \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = -2$

Igualamos los límites laterales $\to L = -2 = -2$

Y comprobamos que la imagen en el punto coincide con el límite:

$f(1) = L - 2 = -\sqrt{2k+1} \to 4 = 2k+1 \to k = \frac{3}{2}$

PROBLEMA 13

Analiza la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax \ \ si \ \ x < -1 \\ \frac{a}{x} \ \ si \ -1 \leq x < 1, \ x \neq 0 \\ \frac{x^2+ax+1}{x+1} \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$ **en los puntos frontera** $x = -1$ **y** $x = 1$**.**

$x < -1 \rightarrow$ función polinómica $\rightarrow$ continua en todo $\mathbb{R} \rightarrow$ continua en $(-\infty, -1)$

$-1 < x < 1 \rightarrow$ función continua en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow$ función continua en $(-1,1) - \{0\}$

$x > 1 \rightarrow$ función polinómica $\rightarrow$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow$ función continua en $(1, +\infty)$

Estudio en el punto frontera $x = -1$:

$f(-1) = \dfrac{a}{-1} = -a$

$\lim_{x \to -1^-} bx^2 + ax = b - a$, $\lim_{x \to -1^+} \frac{a}{x} = \frac{a}{-1} = -a \rightarrow \quad b - a = -a \rightarrow b = 0$

$f(-1) = L \rightarrow -a = b - a \rightarrow b = 0$

Estudio en el punto frontera $x = 1$:

$\nexists f(1) \rightarrow$ ¡OJO! la función no toma ningún valor en $x = 1 \rightarrow$ función no definida para $x = 1$.

$\lim_{x \to 1^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{1} = a$, $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+ax+1}{x+1} = \frac{2+a}{2} \rightarrow a = \frac{2+a}{2} \rightarrow 2a = 2 + a \rightarrow a = 2$

Los límites laterales existen, coinciden y son finitos siempre que $a = 2$. Pero la función no está definida en $x = 1$. Estamos ante una discontinuidad evitable.

Por lo tanto en $x = 1$ la función no es continua.