Beispiel:

Pohlsche Rad hat die Diff. Gleichung:

$$\ddot{\Phi} + 2\gamma\dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = \kappa e^{i\omega_m t} \tag{1}$$

Als eine Lösung haben wir schon in der Vorlesung erhalten:

$$\Phi = c e^{i w_m t} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$$\boxed{c = \underbrace{\frac{\kappa(\omega_0^2 - \omega_m^2)}{(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2}}_{\mathrm{Re}(c)} + \underbrace{i\left(\frac{-\kappa 2\gamma\omega_m}{(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2}\right)}_{\mathrm{Im}(c)}} \tag{5}$$

Nun machen wir der absolute Wert von einem neuen Variabel $|c^\dagger| = 1$. und wir definieren ihn als: $c^\dagger = \frac{c}{|c|}$:

$$|c| = \kappa \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2\right]^{-1/2} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

$$c^\dagger = \frac{c}{|c|} = \frac{\mathrm{Re}(c)}{|c|} + i\frac{\mathrm{Im}(c)}{|c|} = \mathrm{Re}(c^\dagger) + i\mathrm{Im}(c^\dagger) \tag{8}$$

hier können wir diese Gleichung vereinfachen: da $\mathrm{Re}(c^\dagger)^2 + \mathrm{Im}(c^\dagger)^2 = 1$, gibt es ein φ, sodass:

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(c^\dagger) = \frac{(\omega_0^2 - \omega_m^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2}} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

$$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}(c^\dagger) = \frac{-\,2\gamma\omega_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2}} \tag{11}$$

Und endlich können wir c schreiben als:

$$c = |c|e^{i\varphi} = |c|c^\dagger = |c|(\mathrm{Re}(c^\dagger) + i\mathrm{Im}(c^\dagger)) \tag{12}$$

Gehen wir zurück zu unserer Lösung:

$$\Phi = c e^{i\omega_m t} = |c| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega_m t} = |c| e^{i(\omega_m t + \varphi)} \tag{13}$$

da wir unser Problem exponentiell umgeschrieben haben, können wir nun einfach ω_m als Resonanzfrequenz halten:

Wert von Resonanzfrequenz:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{14}$$

Amplitude in Resonanz durch Ersatz:

$$|c| = \kappa \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2\right]^{-1/2} \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

$$= |c| = \kappa \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + (2\gamma)^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)\right]^{-1/2} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$= \frac{\kappa}{2\gamma^2} \cdot \left[(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}) - 1\right]^{-1/2} := A \tag{19}$$

und wir können reeller Teil betrachten:

$$Ae^{i(\omega_R t + \varphi)} = A\cos(\omega_R t + \varphi) + i\sin(\omega_R t + \varphi) \tag{20}$$

Jetzt Rechnen oder approximieren wir φ:

$$A\cos(\omega_R t + \varphi) = A\cos(t\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} + \varphi) \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(c^\dagger) = \frac{(\omega_0^2 - \omega_m^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_m^2)^2 + (2\gamma\omega_m)^2}} \approx 0 \text{ (Resonanz)} \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

$$\implies \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

Und am Ende erreichen wir die Gleichung:

$$A\cos(\omega_R t + \varphi) \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

$$= \frac{\kappa}{2\gamma^2} \cdot \left[(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}) - 1\right]^{-1/2} \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}) \tag{28}$$