Problemas – Tema 1

CCSS Problemas - 7 - condición necesaria y condiciones suficientes de punto de inflexión

1. Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en $f:1\to+\infty$. Obtener los puntos de inflexión y el valor de la ordenada de esos puntos.

La condición necesaria de punto de inflexión es anular la segunda derivada.

$$f(x)=x^2-8\cdot\ln(x) \;\rightarrow\; f'(x)=2x-\frac{8}{x} \;\rightarrow\; f''(x)=2+\frac{8}{x^2} \;\rightarrow\; f''(x)=\frac{2x^2+8}{x^2}$$

$f''(x)=0 \;\rightarrow\; x=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$ → No existen candidatos a puntos de inflexión.

2. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$, razonar si $x=4$ es un punto de inflexión.

Para tener un punto de inflexión en $x=4$, la segunda derivada debe anularse en $x=4$.

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7) \rightarrow f''(x)=2(x-4)(x^2-8x+7)+(x-4)^2(2x-8)$$
$$f''(x)=(x-4)[2(x^2-8x+7)+(x-4)(2x-8)]=(x-4)(2x^2-16x+14+2x^2-16x+32)$$
$$f''(x)=(x-4)(4x^2-32x+46)=2(x-4)(2x^2-16x+23)$$
$f''(4)=0 \rightarrow x=4$ es uno de los candidatos a punto de inflexión

Evaluamos la tercera derivada en $x=4$. Y si el resultado es distinto de 0 , confirmaremos la existencia de un punto de inflexión en $x=4$.

$$f''(x)=2(x-4)(2x^2-16x+23) \rightarrow f'''(x)=2[(2x^2-16x+23)+(x-4)(4x-16)]$$
$$f'''(x)=2(2x^2-16x+23+4x^2-16x-16x+64)=2(6x^2-48x+87)=6(2x^2-16x+29)$$
$f'''(4)=-18\neq 0 \rightarrow x=4$ es un punto de inflexión

3. Obtener los puntos de inflexión de $g(x)=e^x-x$ **.**

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada nula.

Calculamos la primera derivada.

$$g(x)=e^x-x \quad \rightarrow \quad g'(x)=e^x-1$$

Calculamos la segunda derivada.

$$g''(x)=e^x \quad , \quad g''(x)=0$$

La segunda derivada no se anula para ningún valor real ya que la exponencial nunca se anula. Conclusión: la función no posee puntos de inflexión.

4. **Obtener la ecuación de la recta tangente a la función** $f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$ **en su punto de inflexión.**

El dominio de la función, al ser un cociente de polinomios, son todos los reales salvo el valor $x=7/9$ que anula al denominador.

Los puntos candidatos a puntos de inflexión anulan la segunda derivada.

$$f(x)=\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{(3\cdot(7-9x))-[(3x-2)\cdot(-9)]}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{21-27x+27x-18}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=2\cdot\left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)\cdot\left(\frac{3}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{18x-12}{(7-9x)^3}$$

$$f''(x)=\frac{18\cdot(7-9x)^3-(18x-12)\cdot 3\cdot(7-9x)^2\cdot(-9)}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{(7-9x)^2\cdot[18\cdot(7-9x)-(18x-12)\cdot 3\cdot(-9)]}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x-(18x-12)\cdot(-27)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{126-162x+486x-324}{(7-9x)^4}=\frac{324x-198}{(7-9x)^4}=\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x)=0\rightarrow\frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}=0\rightarrow 18(18x-11)=0\rightarrow x=\frac{11}{18}\simeq 0{,}61$$

Ya tenemos candidato a punto de inflexión. La función de partida está definida en toda la recta real salvo en $x=\frac{7}{9}\simeq 0{,}77$, valor que anula al denominador, por lo que evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, \frac{11}{18}) \ \rightarrow \ f''(0)<0 \ \rightarrow \ f(x)\cap$$

$$(\frac{11}{18}, \frac{7}{9}) \ \rightarrow \ f''(0)>0 \ \rightarrow \ f(x)\cup$$

Por lo tanto, $x=\frac{11}{18}$ es punto de inflexión. Su imagen es:

$$f\left(\frac{11}{18}\right)=\left(\frac{3\cdot\left(\frac{11}{18}\right)-2}{7-9\cdot\left(\frac{11}{18}\right)}\right)^2=\left(\frac{\frac{-3}{18}}{\frac{27}{18}}\right)^2=\left(\frac{-3}{18}:\frac{27}{18}\right)^2=(\frac{54}{486})^2=(\frac{3}{27})^2=\frac{1}{81}$$

Las coordenadas del punto son $(\frac{11}{18}, \frac{1}{81})$. La pendiente de la recta tangente en este punto coincide con el valor de la derivada evaluada en la abscisa del punto:

$$f'(x)=\frac{18x-12}{(7-9x)^3}$$

$$f'(\frac{11}{18})=\frac{18\cdot\frac{11}{18}-12}{(7-9\cdot\frac{11}{18})^3}=\frac{-1}{(\frac{3}{2})^3}=\frac{-8}{27}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta resulta:

$$\frac{y-\frac{1}{81}}{x-\frac{11}{18}}=\frac{-8}{27}$$

5. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de la función.

a) La condición necesaria de punto crítico es primera derivada nula.

$f'(x)=1\cdot e^x+(x-a)e^x=e^x(1+x-a)$

Si en $x=0$ hay punto crítico --> $f'(0)=0 \;\to\; e^0(1+0-a)=0 \;\to\; a=1$

b) La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

Si $a=1 \;\to\; f'(x)=e^x(x) \;\to\; f''(x)=e^x(x)+e^x\cdot 1=e^x(x+1)$

$f''(x)=0 \;\to\; e^x(x+1)=0 \;\to\; e^x=0$ o bien $x+1=0$

La exponencial nunca se anula, por lo que el único candidato a punto de inflexión es $x=-1$

Aplicamos condición suficiente de punto de inflexión, evaluando el candidato en la tercera derivada.

$f''(x)=e^x(x+1) \;\to\; f'''(x)=e^x(x+1)+e^x\cdot 1=e^x(x+1+1)=e^x(x+2)$

$f'''(-1)=e^{-1}(-1+2)>0 \;\to\; x=-1$ es punto de inflexión, donde la función pasa de cóncava a convexa.

6. Calcula la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x)=x\cdot e^{\frac{-x}{2}}$

El dominio de la función es la recta real, por ser producto de funciones con dominio toda la recta real (polinomio y exponencial).

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

$$f'(x)=e^{\frac{-x}{2}}+x\cdot e^{\frac{-x}{2}}\cdot(\frac{-1}{2})$$

$$f''(x)=e^{\frac{-x}{2}}\cdot(\frac{-1}{2})+(\frac{-1}{2})[e^{\frac{-x}{2}}+x\cdot e^{\frac{-x}{2}}\cdot(\frac{-1}{2})]=\frac{-1}{2}e^{\frac{-x}{2}}[2-\frac{x}{2}]$$

$$f''(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{-1}{2}e^{\frac{-x}{2}}[2-\frac{x}{2}]=0$$

Como la exponencial nunca se anula, igualamos a 0 el interior del corchete.

$2-\frac{x}{2}=0 \;\rightarrow\; x=4$ → candidato a punto de inflexión

En la recta real evaluamos la segunda derivada en los intervalo formados por el punto candidato a punto de inflexión y por los puntos que no pertenecen al dominio.

$(-\infty,4) \;\rightarrow\; f''(-10)<0$ → función cóncava

$(4,\infty) \;\rightarrow\; f''(10)>0$ → función convexa

Por lo tanto, $x=4$ es un punto de inflexión. Su imagen:

$$f(4)=4\cdot e^{\frac{-4}{2}}=4\cdot e^{-2}=4/e^2$$

7. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x(x^2-x+1)$. Halla las abscisas de los puntos de inflexión

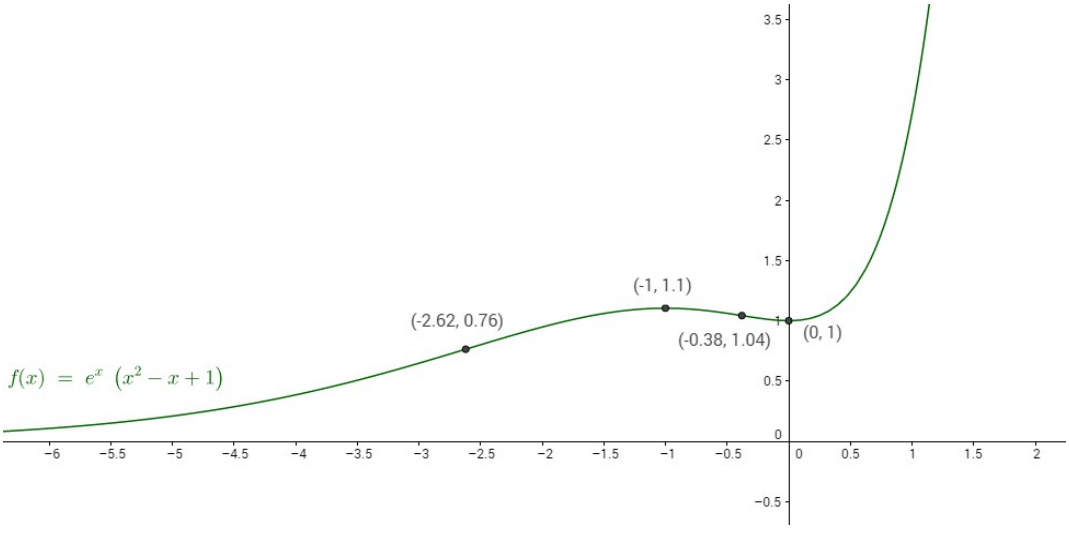
El dominio de la función es toda la recta real. Los candidatos a puntos de inflexión se obtienen de igualar la segunda derivada a cero.

$$f'(x)=e^x(x^2-x+1)+e^x(2x-1) \;\rightarrow\; f'(x)=e^x(x^2+x)$$
$$f''(x)=e^x(x^2+x)+e^x(2x+1) \;\rightarrow\; f''(x)=e^x(x^2+3x+1)$$
$$f''(x)=0 \;\rightarrow\; x^2+3x+1=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Donde nuevamente recordamos que la exponencial nunca se anula.

Para confirmar que estamos ante puntos de inflexión, podemos evaluar la tercera derivada en los puntos candidatos. Y si la tercera derivada resulta distinta de cero, confirmaremos su existencia. O bien (puede ser más sencillo), determinar la curvatura a ambos lados de estos puntos y comprobar que aparece cambio en dicha curvatura a izquierda y a derecha de cada candidato a punto de inflexión.

Función $f(x)$	$f(x)\cup$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\infty)$
Segunda Derivada $f''(x)$	$f''(-10)>0$	$f''(-1)<0$	$f'(0)>0$



8. Sea la función $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=x^3-2x+5$ **.**

Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de inflexión.

La condición necesaria de punto de inflexión nos pide anular la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-2 \;\rightarrow\; f''(x)=6x \;\rightarrow\; f''(x)=0 \;\rightarrow\; 6x=0 \;\rightarrow\; x=0$$

Para demostrar que el candidato a punto de inflexión, efectivamente es un punto de inflexión, aplicamos la condición suficiente. Por ejemplo, calculando la tercera derivada.

$$f'''(x)=6$$

Evaluamos la tercera derivada en el candidato a punto de inflexión, y vemos el signo.

$$f'''(0)=6>0$$

En $x=0$ hay punto de inflexión, de cóncavo a convexo.

La imagen del punto de inflexión es:

$$f(0)=0^3-2\cdot 0+5=5$$

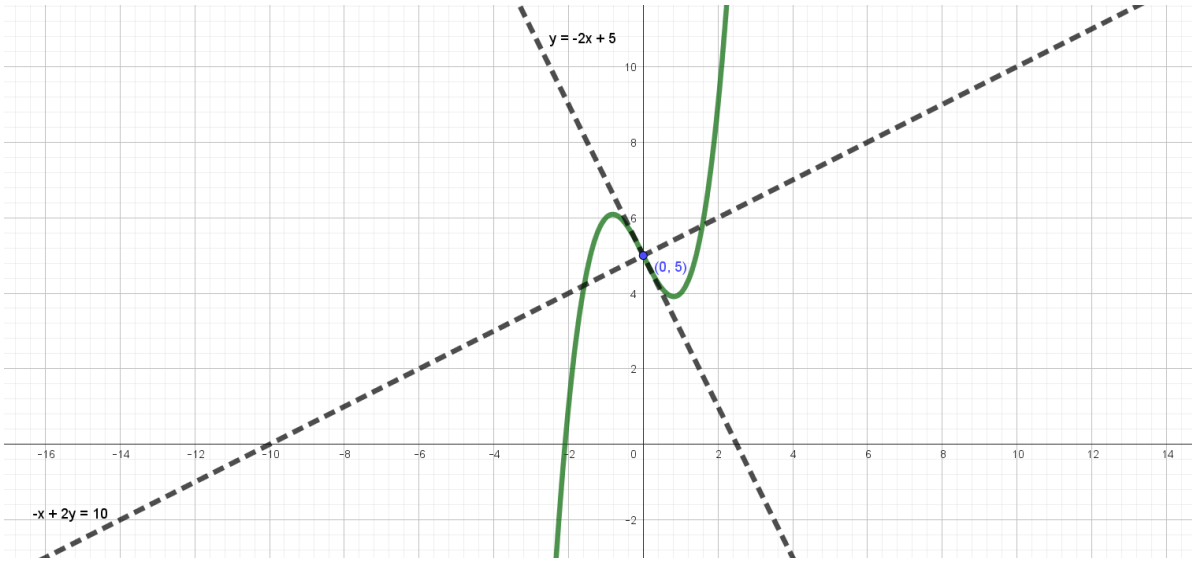
Por lo que debemos escribir la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función en el punto de tangencia $(0,5)$.

$f'(0)=\dfrac{y-5}{x-0}$ → La derivada evaluada en $x=0$ es $f'(0)=-2$ → Por lo tanto:

$$-2=\frac{y-5}{x-0} \;\rightarrow\; -2x=y-5 \;\rightarrow\; y=-2x+5$$ → Recta tangente

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. Por lo tanto, su ecuación punto-pendiente es:

$$\frac{-1}{f'(0)}=\frac{y-5}{x-0} \;\rightarrow\; \frac{-1}{-2}=\frac{y-5}{x-0} \;\rightarrow\; x=2y-10 \;\rightarrow\; x-2y+10=0$$ → Recta normal



9. Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima (ayuda: recuerda la relación que hay entre pendiente y derivada a través de la interpretación geométrica de la derivada).

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada. Por lo tanto, si me preguntan cuando la pendiente es mínima es lo mismo que calcular cuándo la función derivada es mínima.

¿Y qué significa minimizar una función? Derivarla e igualarla a cero, ¿verdad?

¿Y si debo minimizar la función derivada? Pues derivo la función derivada e igualo a cero. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero. Moraleja: minimizar o maximizar la pendiente de la recta tangente, es aplicar la condición necesaria de punto de inflexión.

$f(x)=\frac{x}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ → Para evitar liarnos con tantas “primas” de la derivada, vamos a llamar a la primera derivada $f'(x)=g(x)=\frac{1-x}{e^x}$ → Y ahora simplemente obtenemos el mínimo relativo de $g(x)$. Un problema que hemos resuelto miles de veces.

$g'(x)=0 \rightarrow g'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow$ punto crítico de la función $g(x)$.

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para ver si es un mínimo relativo.

$g''(x)=\frac{e^x-(-2+x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-(-2+x)}{e^x}=\frac{3-x}{e^x} \rightarrow g''(2)=\frac{3-2}{e^2}>0 \rightarrow x=2$ es un mínimo relativo de la derivada. Por lo tanto, es un mínimo relativo de la pendiente de la recta tangente.

Obtenemos su imagen en la función de partida → $f(2)=\frac{2}{e^2} \rightarrow (2,\frac{2}{e^2})$ minimiza la pendiente de la recta tangente a la función.

10. Sea $f(x)=x^3-3x^2+2x$ **.**

a) Halla los puntos de corte con los ejes, la monotonía, la curvatura, los extremos relativos y los puntos de inflexión.

b) Represente gráficamente la función.

a) Corte con los ejes:

$f(0)=0$ → La función pasa por el punto (0,0).

$f(x)=0 \rightarrow x^3-3x^2+2x=0$ → soluciones de la ecuación polinómica: $x=0, x=1, x=2$

Puntos de corte con el eje horizontal: $(0,0),(1,0),(2,0)$.

Derivamos (condición necesaria de extremo relativo):

$f'(x)=3x^2-6x+2$

Igualamos la primera derivada a cero, y obtenemos los puntos críticos:

$x=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ (candidatos a extremos relativos)

Calculamos la segunda derivada (condición suficiente de extremo relativo):

$f''(x)=6x-6$

Evaluamos la segunda derivada en los extremos relativos:

$f''(\frac{3+\sqrt{3}}{3})>0$ → mínimo relativo en $(\frac{3+\sqrt{3}}{3},-0.38)$

$f''(\frac{3-\sqrt{3}}{3})<0$ → máximo relativo en $(\frac{3-\sqrt{3}}{3},0.38)$

La función es estrictamente creciente desde menos infinito hasta el máximo relativo.

Entre el máximo y el mínimo, la función es estrictamente decreciente.

Desde el mínimo relativo hasta más infinito, la función es estrictamente creciente.

Al igualar la segunda derivada a cero, obtenemos los candidatos a puntos de inflexión:

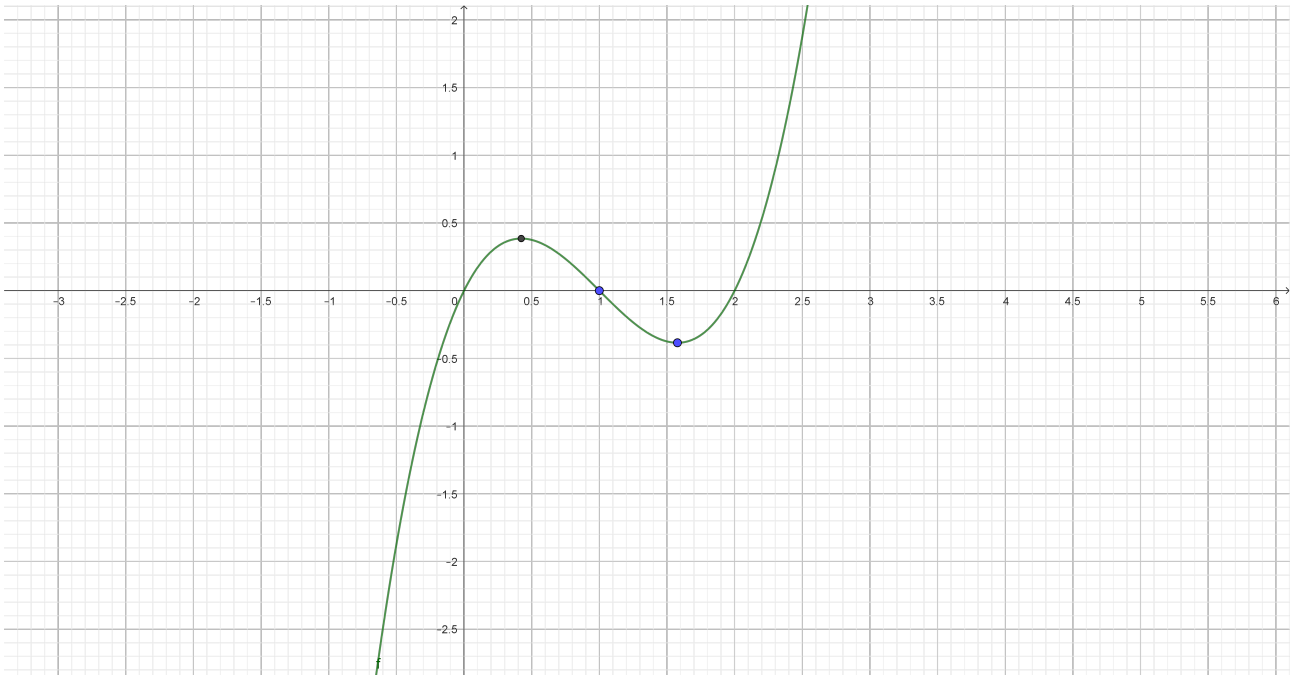
$f''(x)=6x-6 \rightarrow 6x-6=0 \rightarrow x=1$ → candidato a punto de inflexión.

Realizamos la tercera derivada (condición suficiente de punto de inflexión):

$f'''(x)=6$

Evaluamos la tercera derivada en x=1 (candidato a punto de inflexión).

$f'''(1)=6>0$ → en x=1 contamos con un punto de inflexión (paso de cóncava a convexa).

Las coordenadas del punto de inflexión (1,0)

b)