Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 15 - existencia de inversa de una matriz en función del valor de su determinante

1. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de A en función del parámetro real a .

Calculamos el determinante de la matriz.

$$|A| = -a(a^2-1) - (2a) = -a^3 - a$$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3 - a = 0 \rightarrow -a(a^2+1) = 0 \rightarrow a = 0$$

Discusión de casos.

Si $a \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3 \rightarrow$ admite inversa

Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Existe al menos un

menor de orden 2 no nulo $\rightarrow \text{rango}(A) = 2 \rightarrow$ no admite inversa

2. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales, tal que $A^2=I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3). Prueba que la matriz A tiene inversa y dé dicha inversa

Una matriz A tiene inversa A^{-1} , y esta es única, si se cumplen las siguientes relaciones:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Se demuestra la existencia de la matriz inversa A^{-1} si el determinante de A es no nulo. Y de las condiciones del enunciado:

$$A^2 = I \rightarrow A \cdot A = I \rightarrow |A \cdot A| = |I|$$

El determinante del producto es el producto de los determinantes. Y el determinante de la matriz identidad es igual a la unidad

$$|A \cdot A| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \rightarrow (|A|)^2 = 1 \rightarrow |A| = \pm 1 \neq 0$$

Al ser el determinante no nulo, se demuestra la existencia de la matriz inversa A^{-1} y su valor es $A^{-1} = A$ ya que la propia matriz A cumple $A \cdot A = I$.

3. Determina, aplicando determinantes, para qué valores de a no existe inversa.

$$\mathbf{a)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & a \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b)} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & a & 4 \\ 0 & a & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a)} \quad |B| = -1 + 0 - a - (-4 + a) = 3 - 2a$$

$$|B| = 0 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{b)} \quad |C| = 4a + 3a^2 + 0 - (4a^2 + 12a + 0) = -a^2 - 8a$$

$$|C| = 0 \rightarrow -a^2 - 8a = 0 \rightarrow a(a + 8) = 0 \rightarrow a = 0, \quad a = -8$$

4. Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) Resuelve $A X = -3 X$. Determina, si existe, alguna solución con $x=1$.

a) Operamos matricialmente.

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Una matriz admite inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Por lo tanto:

$$|A + \lambda I| = (-2 + \lambda)(1 + \lambda)(-2 + \lambda) - 4(-2 + \lambda)$$

Sacamos factor común e igualamos a cero.

$$(-2 + \lambda)[(1 + \lambda)(-2 + \lambda) - 4] = 0$$

En un producto igualado a cero, al menos uno de los términos debe anularse. Es decir:

$$(-2 + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$[(1 + \lambda)(-2 + \lambda) - 4] = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = -2, \lambda = 3$$

En conclusión. Existe inversa siempre y cuando se cumpla que $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 3$

b) Operamos e igualamos.

$$A X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2y \\ -2x + y \\ -2z \end{pmatrix}, \quad -3 X = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x - 2y \\ -2x + y \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales, por lo que obtenemos un sistema 3x3.

$$\begin{cases} -2x - 2y = -3x \\ -2x + y = -3y \\ -2z = -3z \end{cases} \rightarrow \text{De la tercera ecuación} \rightarrow z = 0$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es (-2) veces la primera, por lo que podemos obviarla.

$x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y \rightarrow$ Una incógnita será un parámetro libre. Por ejemplo: $y = \alpha$. De esta forma, tenemos un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre. Sus infinitas soluciones son:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Si } \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{solución general con } x = 1$$

5. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k=1$.

b) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

Si el determinante es distinto de cero, la matriz admite inversa. Aplicamos Sarrus:

$|B \cdot A| = k(k+2) + 3 = k^2 + 2k + 3$, $|B \cdot A| = 0 \rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0 \rightarrow$ No existe solución real $\rightarrow$ La matriz admite inversa, independientemente del valor de k .

Si $k=1 \rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Aplicamos método directo para obtener la inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando un sistema 4x4.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - d = 0 \\ 3a + 3c = 0 \\ 3b + 3c = 1 \end{cases} \rightarrow a = 1/2, \quad b = 1/6, \quad c = -1/2, \quad d = 1/6$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos Sarrus para obtener el determinante:

$$|A \cdot B| = 2k^2 + 0 - 3k - (-k + 0 + k(2k - 2)) = 2k^2 - 3k + k - 2k^2 + 2k = 0$$

Como el determinante es nula, nunca existirá la inversa independientemente del valor de k .

6. Considere la igualdad $A \cdot M = B$, donde $A = \begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M?

b) ¿Para qué valores de t es la matriz A invertible?

c) Para el caso $t = -1$, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.

a) Si A es una matriz 3x3 y B es una matriz 3x2, la matriz M deberá ser 3x2.

b) Si el determinante de la matriz A es diferente de cero, la matriz admitirá inversa. Aplicamos la regla de Sarrus:

$$|A| = t^2 - 2t - 2 - (-2t + t - 2t) = t^2 + t - 2$$

$$|A| = 0 \rightarrow t = 1, t = -2$$

Por lo tanto, la matriz A es invertible si y solo si $t \notin \{-2, 1\}$

c) Para $t = -1$ existe la inversa de A $\rightarrow M = A^{-1} \cdot B$

La matriz inversa de A resulta (puedes usar la web www.matrixcalc.org/es para calcularla, ya sea por Gauss-Jordan o por adjuntos):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow M = A^{-1} \cdot B \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & -7/2 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. La matriz I_3 es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica $2X + C = A - X \cdot B$

a) $2I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |2I + B| = 2 + 0 + 0 - (1 + 0 + 0) = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existe inversa por ser el determinante no nulo.

b) $2X + C = A - X \cdot B \rightarrow 2X + X \cdot B = A - C \rightarrow X \cdot (2I + B) = A - C \rightarrow$

$X(2I + B) = A - C \rightarrow$ Aplicamos inversa de $2I + B$, ya que del apartado a) sabemos que existe.

$X = (A - C) \cdot (2I + B)^{-1} \rightarrow$ usa www.matrixcalc.org/es para comprobar resultados:

$$(2I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -10 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Considera las matrices cuadradas de orden 2 de la forma: $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, con x e y números reales.

a) Comprueba que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x e y .

b) Para $x=1$ e $y=-1$, calcule M^{-1} .

a) Una matriz es invertible (admite inversa) si su determinante es distinto de cero.

$$|M| = x^2 + y^2 + 1$$

Como los valores x e y son números reales, sus cuadrados nunca serán nulos. Por lo que la expresión $x^2 + y^2 + 1$ es estrictamente positiva $\rightarrow |M| \neq 0 \rightarrow$ Existe inversa independientemente del valor de x e y .

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Empleo método directo para sacar la inversa:

$$M \cdot M^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando, llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-d=0 \\ 2a+c=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \rightarrow \text{De la segunda ecuación } b=d \rightarrow \text{Llevamos este resultado a la cuarta ecuación:}$$

$$2b+b=1 \rightarrow b=\frac{1}{3}, d=\frac{1}{3}$$

De las ecuaciones primera y tercera obtenemos un sistema 2x2: $\begin{cases} a-c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \rightarrow a=\frac{1}{3}, c=-\frac{2}{3}$

La matriz inversa queda: $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9. Calcule los valores del parámetro t para los la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz es regular si admite inversa.

No es regular si no admite inversa. Y una matriz cuadrada no admite inversa si su determinante es cero.

Aplicamos Sarrus e igualamos a cero.

$$|A| = 0 + (t+1)(-t+1) \cdot 2 - (t+1)(-t+1) - (0 + (t+1) + t(t+1)(-t+1))$$

$$|A| = (t+1)(-t+1) - (t+1) - t(t+1)(-t+1)$$

Sacamos factor común:

$$|A| = (t+1)(-t+1 - 1 - t(-t+1)) = (t+1)(-t+t^2-t) = (t+1)(t^2-2t) = t(t+1)(t-2)$$

$$|A| = 0 \rightarrow t=0, t=-1, t=2$$

Por lo tanto, no existe inversa si $t=0$, $t=-1$ o bien $t=2$.