Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 5 - posición relativa de una función respecto de la asíntota

1. Sea la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ **, para** $x\neq -1, x\neq 2$ **.**

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de la función.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de la función donde ésta corta a la asíntota horizontal.

a) Se trata de una función racional, es decir, un cociente de funciones polinómicas. Por tanto , su dominio son todos los reales salvo los valores que anulan al denominador:

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$$

Candidatos a AV: $x=-1$ y $x=2$ → Estudiamos los límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

Existen dos asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=2$.

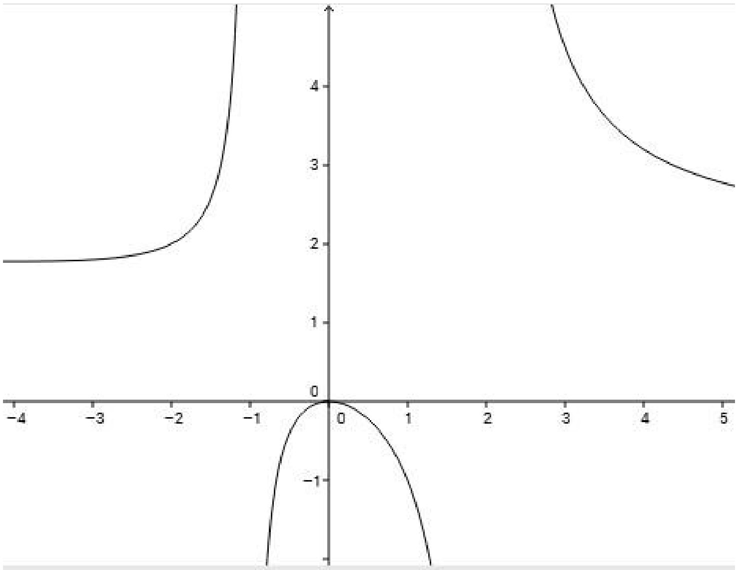
La AH se calcula con el estudio en el infinito de la función. Al ser un cociente de polinomios, la Ah en más infinito coincide con menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2}{1-0-0}=2$$

Como se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x)=k\,,\,k\in\mathbb{R}$ → Existe una asíntota horizontal en $y=2$.

Al haber asíntota horizontal, no puede haber asíntota oblicua.

$$Representación \;\; gráfica \;\; de \;\; f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$$



b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento debemos calcular la primera derivada:

$$f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x^2}{x^2-x-2} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{4\text{x}(x^2-x-2)-2x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-4x^2-8x-4x^3+2x^2}{(x^2-x-2)^2}=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

Igualamos la primera derivada a 0 para hallar los puntos críticos candidatos a extremos relativos.

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad -x(2x+8)=0$$

Tenemos de valores críticos: $x=0$, $x=-4$.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)<0$	$f'(-2)>0$	$f'(\frac{-1}{2})>0$	$f'(1)<0$	$f'(10)<0$

Conclusión: $(-4,-1)$ es un mínimo relativo y $(0,2)$ es máximo relativo.

c) Para calcular el punto de corte de la gráfica con la asíntota horizontal es necesario hacer un sistema de ecuaciones entre la asíntota $y=2$ y la función.

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x)=2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Igualamos} \rightarrow \quad 2=\frac{2x^2}{x^2-x-2} \quad \rightarrow \quad -x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=-2$$

El punto de corte es $(-2,2)$.

2. Indicar la posición relativa de $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}$ respecto a su horizontal. ¿Corta la función en algún momento a la A.H.? En caso afirmativo, encontrar el punto de corte.

La posición relativa nos pide estudiar si la función queda, en el infinito, por encima o por debajo de su A.H. o de su A.O.

En este caso, nos piden el estudio respecto la A.H.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}=1$ → Donde hemos aplicado el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia → $y=1$ es A.H. en $x\to+\infty$. Y como es un cociente de polinomios, también lo será en $x\to-\infty$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$, ya que el denominador solo se anula en -2 y en 2.

El corte de la función con su A.H. se obtiene igualando la función a la A.H.

$$\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}=1 \quad\to\quad x^2-3x+3=x^2-4 \quad\to\quad x=\frac{7}{3}$$

Por lo tanto, debemos comparar la A.H. con imagen de la función en un punto en los intervalos:

$(-\infty,-2)$

$f(-10)=\frac{100+30+3}{100-4}=\frac{133}{96}>1$ → la función está por encima de la A.H.

$(-2,2)$

$f(0)=\frac{0-0+3}{0-4}=\frac{-3}{4}<1$ → la función está por debajo de la A.H.

$(2,\frac{7}{3})$

$f(2.1)=2.7>1$ → la función está por encima de la A.H.

$(\frac{7}{3},\infty)$

$f(10)=\frac{100-30+3}{100-4}=\frac{73}{96}<1$ → la función está por debajo de la A.H.