Transformando la MatemáTICa

PRESENTACIÓN.

Las herramientas cognitivas son instrumentos abiertos y modificables que tanto los docentes como los estudiantes operan y manipulan para ayudarse a si mismos a involucrarse en pensamientos constructivo, permitiéndoles pensar más alla de sus propias limitaciones cognitivas.

El interés por el estudio del impacto de las tecnologías de la información y a comunicación (TIC) en los procesos educativos ha aumentado progresivamente en los últimos años, en paralelo a la creciente incorporación de estas tecnologías en todos los niveles de enseñanza, y la matemática no es ajena a ello. Se pretende que los destinatarios de este material desarrollen habilidades y competencias para innovar mediante el uso de TICs en su práctica docente y se desenvuelvan en la sociedad actual del conocimiento, como también formarlos en el uso pedagógico de las TIC y promover la producción de nuevos saberes para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, estimulando así a la reflexión sobre las practicas docentes actuales.

JUSTIFICACION.

Los fenómenos entendidos como globalización, los avances en el ámbito científico y tecnológico, la accesibilidad del uso de la información y comunicación nos impulsan a la busqueda de respuestas específicamente en el ámbito educativo, de donde emerge la sociedad del conocimiento la cual atribuye al saber la fuente principal para constitución del valor agregado en todos los procesos de producción de bienes y servicios de un país (Briss). Tal como afirma Manuel Castells, las tecnologías de la información, junto con las habilidades para usarlas y adaptarlas, son un factor crítico para generar el acceso a la riqueza, poder y conocimiento en nuestros tiempos. La comunicación y el acceso a la información no es un lujo sino un derecho fundamental de los pueblos para conseguir un desarrollo humano integral, dicho desarrollo lo entendemos como el fortalecimiento de la democracia con justicia social la prosperidad económica con equidad y la realización del potencial humano en sus múltiples dimensiones. En la innegable impronta de la inclusión de las tecnologías en los ámbitos de aprendizaje, se vislumbran cambios emergentes en las formas de aprender y por ende en el modo de enseñar. Actualmente estamos asistiendo a un crecimiento importante de la oferta de educación a través de las nuevas tecnologías. Las herramientas cognitivas son instrumentos abiertos y modificables que los estudiantes operan y manipulan para ayudarse a sí mismos a involucrarse en pensamiento constructivo. En esencia, innovar es introducir una novedad que conduce a cambios visibles. En el ámbito educativo, la introducción de las TIC ha traído consigo nuevos recursos: ordenador, aplicaciones informáticas, internet, etc. Por otro lado, a nadie se le escapa que estos recursos educativos han cambiado notablemente la forma de enseñar y de aprender de los alumnos, La fisonomía del aula se ha transformado, incluso ha variado su denominación, ahora los colegios tienden a llamarlas “clases digitales” en las que se pueden utilizar presentaciones multimedia, busqueda de información a través de la red, etc. El perfil docente solicitado también se ha visto alterado por esto, siendo más un mediador entre el conocimiento y el alumnado que el depositario exclusivo del saber. Todo esto influye decisivamente en la forma de enseñar y aprender. Nuestros alumnos, nativos digitales, usan las TIC con la misma naturalidad que antes se utilizaba un diccionario en clase. Es un recurso más, que permite acceder a contenidos vinculados al ámbito escolar pero también a otros relacionados con sus intereses personales.

Las TIC implican el aumento de la información, su acceso y almacenamiento, por ello es imprescindible dotar a los alumnos no solo de información sino de habilidades para acceder a la misma de manera autónoma. Dice Tedesco (2003) que hoy es más necesario aprender a aprender.

Existen nuevas formas de comunicación y experiencias para construir el conocimiento en la actualidad, puesto que internet ha revolucionado la creación del conocimiento, rompiendo con la hegemonía que las universidades y los expertos tenían en su generación. Hoy el conocimiento también es generado por personas ajenas a estas elites. La escuela, las instituciones encargadas de la educación deben inculcar esta nueva forma de crear, haciendo hincapié en estrategias de uso de instrumentos de comunicación, ya sea esta sincrónica o asincrónica que se encuentran en internet.

Por otro lado la capacidad de tratamiento de la información digital y su representación hace que el desarrollo de las TIC traiga consigo nuevos lenguajes, lo que hace dominar procedimientos específicos de comunicación. Las tecnologías digitales demandan del sujeto un alto grado de formación, alfabetización para que no solo tenga el uso mecánico y simple de las tecnologías sino su uso inteligente y critico (Area et. al.). La recomendación de la UNESCO (Delors 1996), los alumnos del siglo XXI han de aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a convivir, aprender a colaborar y aprender a ser.

Este Taller se centrara en la difusión del uso del *GeoGebra* en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes áreas de la matemática que se plantean aquí. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001. GeoGebra está escrito en Java y es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo y por eso puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas. Su categoría más cercana es "software de geometría dinámica".

Modalidad de trabajo

El presente Taller pretende dar una mirada a las diferentes áreas de la matemática abordada desde las TIC, como el álgebra, el análisis matemático en una y varias variable, la teoría de grafos, los fractales, la geometría, etc. Para ello se contarán experiencias, problemas abordados desde las TIC, para que los participantes desarrollen habilidades y competencias para innovar mediante el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en su práctica, en su quehacer diario para desenvolverse en la sociedad actual del conocimiento. Promoviendo la producción de nuevos saberes para la enseñanza y el aprendizaje de las mismas, estimulando así a la reflexión sobre las prácticas docentes actuales, en los distintos niveles.

Se propone una metodología de enseñanza que combinará diversas técnicas como: la instrucción directa, discusión y trabajo en equipo, reflexión personal y trabajo individual y grupal en ejercicios y actividades mediante el uso de software GeoGebra. Como recursos los participantes deberán contar con Computador con acceso a internet.

Innovación en procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la incorporación de GeoGebra.

Las instituciones de educación superior han experimentado un cambio de cierta importancia en el conjunto del sistema educativo de la sociedad actual tales como desplazamiento de los procesos de formación desde los entornos convencionales hasta otros ámbitos, demanda generalizada para que los estudiantes adquieran las competencias necesarias para el aprendizaje continuo. La definición de la estrategia institucional es clave en cualquier proceso de introducción de una innovación. (Salinas, 1999).

Planteamiento del Problema de investigación.

Plantear la distinción entre las Tics para aprender y las Tics para enseñar y aprender es relevante también para explicar cómo y por qué la implicación de los profesores como agentes educativos en los contextos en los que se incorporan las Tics parten de un supuesto centrado casi totalmente en el aprendizaje y poco sensible al papel fundamental de la enseñanza. En el contexto de la sociedad de información los profesores deben aprender a dominar la nueva forma de pensar y conocer lo que las Tics posibilitan. (Cabero, 2007)

Existe mucha literatura de investigación en prácticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática con GeoGebra. Las preguntas que intentaremos respondernos aquí son ¿Cómo incide el uso de GeoGebra en el hallazgo de la solución a un problema de matemática? ¿Hay diferencia en el planteamiento de la resolución con lápiz y papel y el planteamiento mediante el uso del software?

Objetivos específicos

Identificaremos, y observaremos cómo se articulan los métodos algebraicos, gráficos en el proceso de resolución de problemas, en lapiz y papel y con GeoGebra.
Analizaremos las ventajas y desventajas de la aplicación de uno de los enfoques planteados y como se podrían integrar y articular al proceso de enseñanza y aprendizaje de los problemas planteados.
Identificar como ésta herramienta tecnológica favorece el trabajo colaborativo de los alumnos, como un ambiente más que favorable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las diferentes áreas de la matemática.
Por ello proponemos el presente Taller, que dará una mirada de la matemática abordada desde las TIC, en diferentes áreas como el álgebra, el análisis matemático, en una y varias variables, la teoría de grafos, los fractales, la geometría, como así también en la física.

Marco de Referencia.

Marco Teórico.

¿Qué es el software GeoGebra?

GeoGebra es un software libre que se utiliza para la educación en todos sus niveles desde su creación, se encuentra disponible en múltiples plataformas. Dicho software reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas, etc.

El programa contiene una página principal, que se encuentra compuesta por:
Una Zona Gráfica, la Barra de Herramientas, un Campo de Entrada y la Ventana de Álgebra.

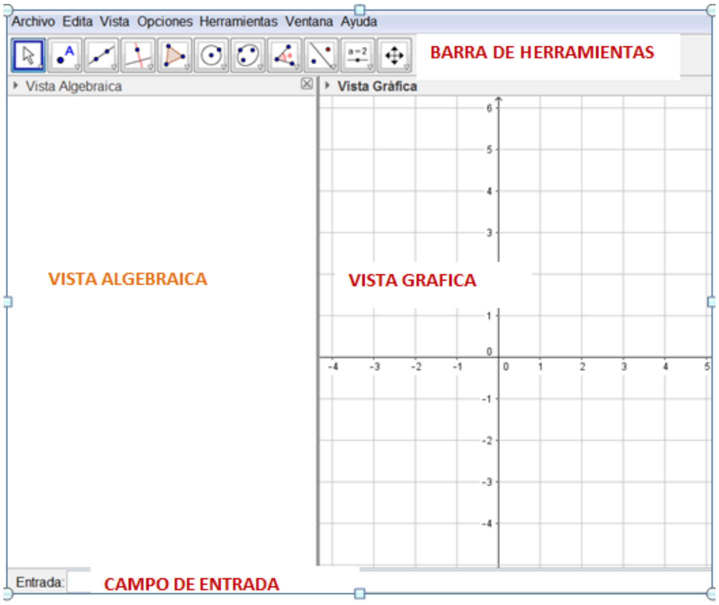


Figura 1

En las últimas versiones con **GeoGebra 5** podemos trabajar en ·3D; es así que podemos graficar con rectas y planos en el espacio, como así también con cualquier tipo de superficies.

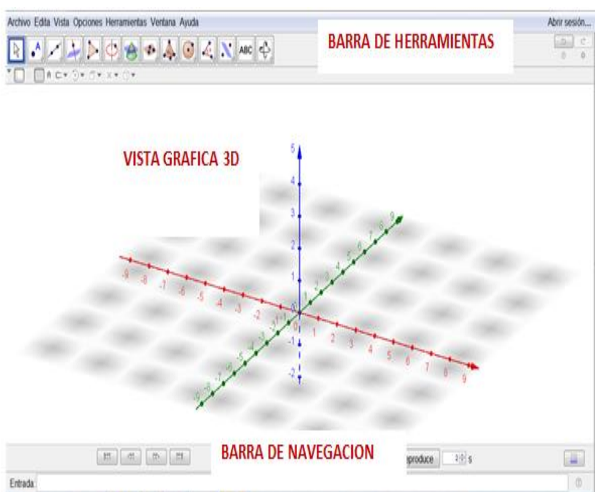


Figura 2

Estas dos perspectivas caracterizan a *GeoGebra*: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

Las TICs en la enseñanza de la matemática.

No debemos olvidar que la mayoría de los docentes fuimos formados en una época cuando la tecnología estaba prácticamente ausente o recién comenzando a surgir. Se trata de un conocimiento profesional que se adquiere experimentando, llevando al aula distintas situaciones, analizando qué sucedió, ajustando y volviendo a probar. No requiere saberlo todo con anterioridad, sino que se aprende al mismo tiempo que se enseña. Como profesores, conocemos el “vértigo” que esto produce, pero también sabemos que es el único modo en que se construyen los conocimientos docentes. Se trata, entonces, de tomar toda la potencialidad que ofrece GeoGebra, para mejorar las condiciones de enseñanza y del aprendizaje de la Matemática.

Enfoque didáctico.

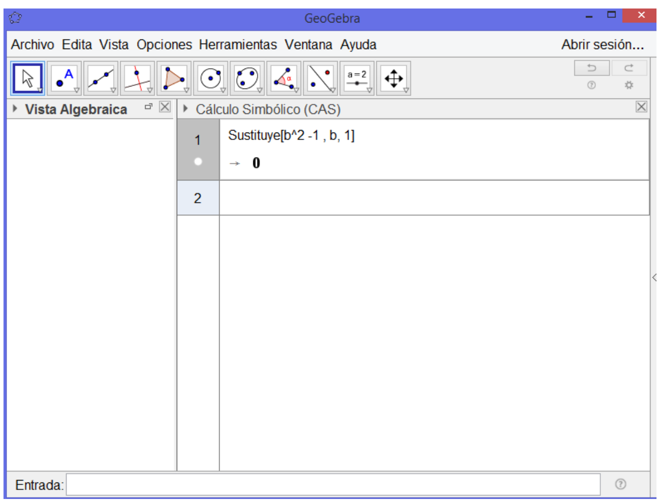
La enseñanza de la Matemática se ha configurado esencialmente desde un enfoque basado en la mecanización y repetición, que supone la transmisión directa del saber: el profesor enseña y los alumnos, supuestamente, aprenden, como una consecuencia directa. Desde esa perspectiva, resultan en general alumnos que son capaces de reproducir estrategias señaladas por el profesor, pero que encuentran grandes dificultades a la hora de decidir cómo resolver situaciones nuevas para ellos. El aprendizaje de una práctica que permita resolver verdaderos problemas queda en manos de los alumnos, y no todos lo hacen con éxito. Desde la perspectiva que adoptamos, entendemos que el objetivo es que los alumnos aprendan a hacer Matemática.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Encontrar el valor de una expresión algebraica simplemente consiste en reemplazar los valores de las variables en la expresión; en GeoGebra se utiliza la vista CAS y el comando

"Sustituye{expresión,a reemplazar, reemplazo}"

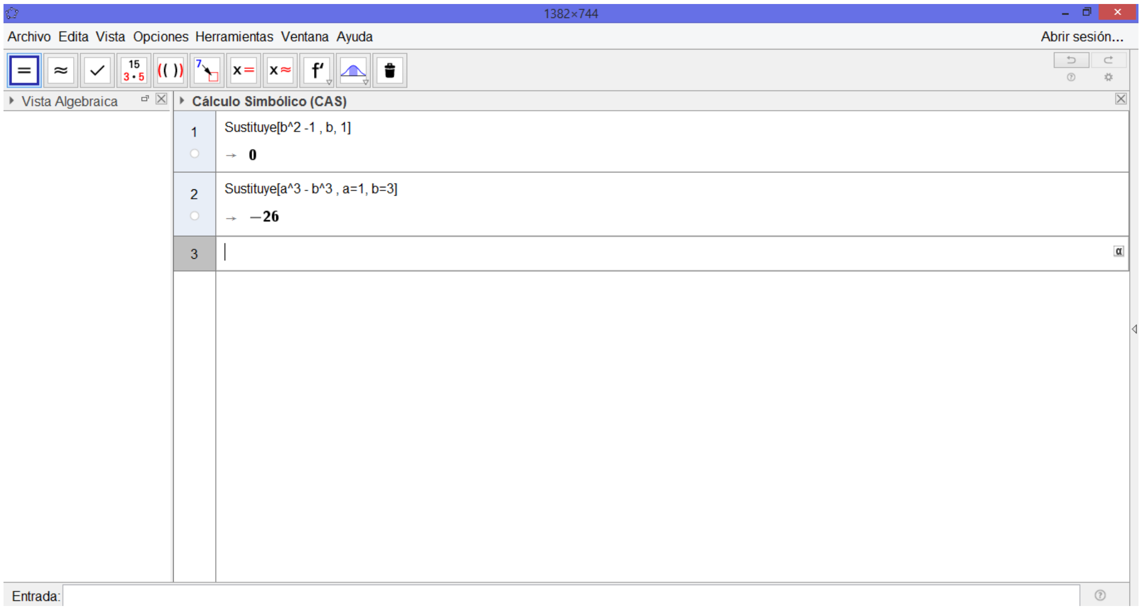
Ejemplo: Dada la expresión b^2-1, encontrar su valor para b=1.



Ejemplo: Encontrar el valor numérico de la expresión a^3-b^3 para a=1 y b=3

En este caso, como hay que sustituir varias variables por valores numéricos, usamos el comando "Sustituir [Expresion, lista de reemplazos]"

Sustituye[a^3 – b^3 ,a=1,b=3]



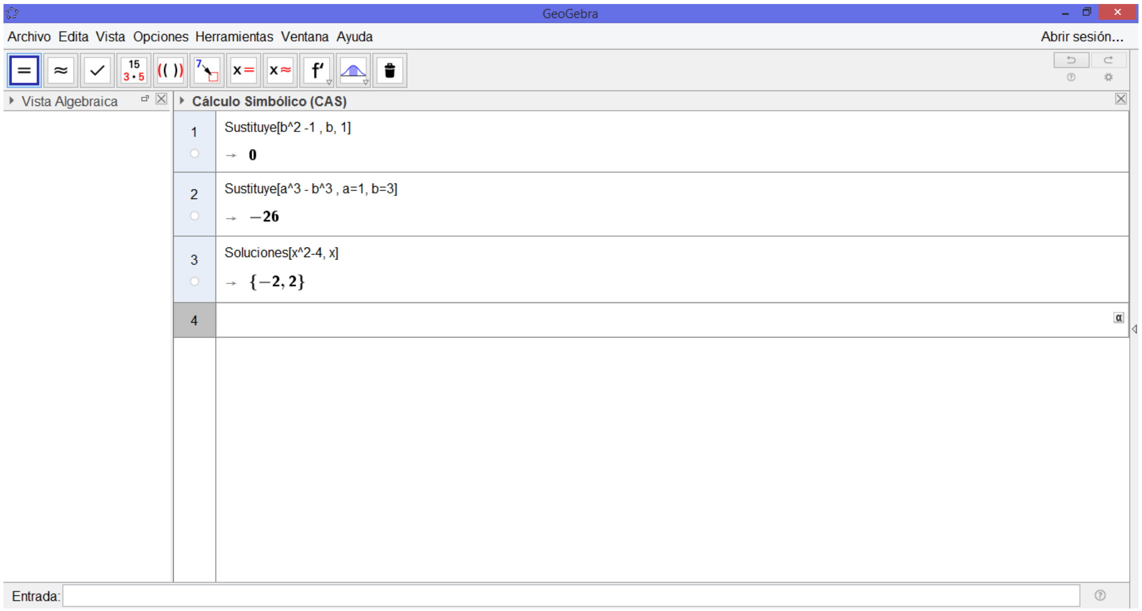
Resolución de Ecuaciones

Encontrar la solución de una ecuación, en una variable real con GeoGebra se realiza con el comando

“Solucion[Ecuacion]”

Ejemplo: Encontrar la solución de x^2-4 utilizando GeoGebra.

Solucion[ecuacion, variable]

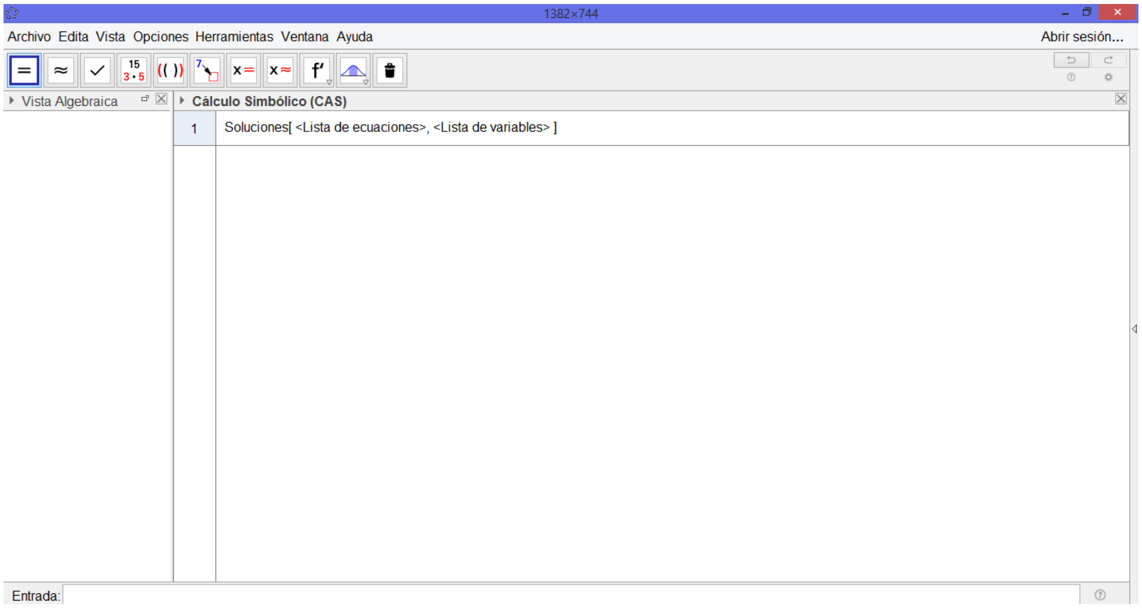


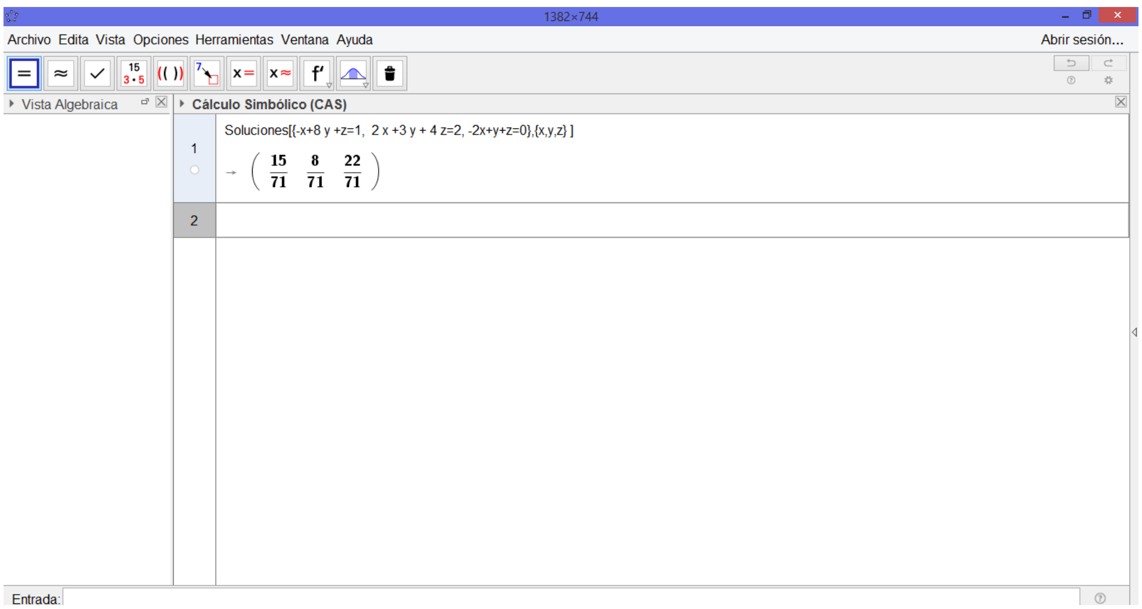
<u>Resolución de Sistemas de Ecuaciones lineales</u>

Así como en los casos anteriores de ecuaciones, para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) vamos a utilizar el comando

"Solucion[lista de ecuaciones,lista de variables]"

<u>Ejemplo</u>: Encontrar las soluciones al sistema $\begin{cases} -x+8y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$





El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

En álgebra lineal, un **sistema de ecuaciones lineales**, también conocido como **sistema lineal de ecuaciones**, es un conjunto de ecuaciones lineales (donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

El problema consiste en encontrar los "m" valores reales desconocidos, es decir x_1, x_2 x_3,…, y x_m que satisfacen las "n" ecuaciones. Los sistemas son Compatibles o Incompatibles.

Los sistemas de ecuaciones pueden tener alguno de estos tres tipos de soluciones:

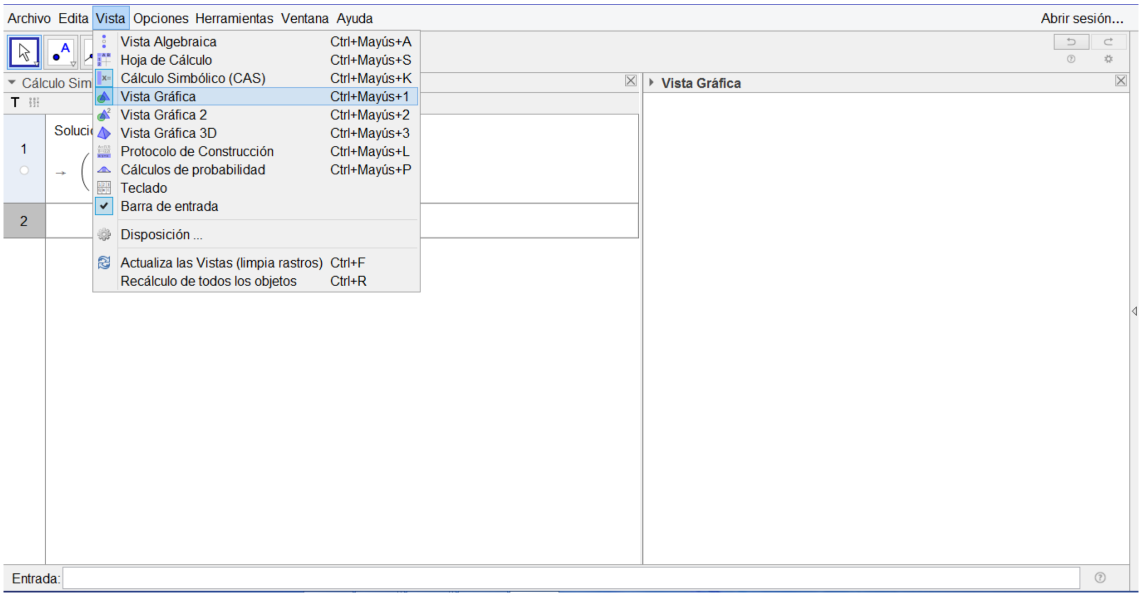
- ✓ Única Solución
- ✓ Infinitas soluciones
- ✓ No tiene solución

Siempre que el sistema tenga solución diremos que el sistema es **compatible**, y si el sistema no tiene solución entonces lo llamaremos **incompatible**.

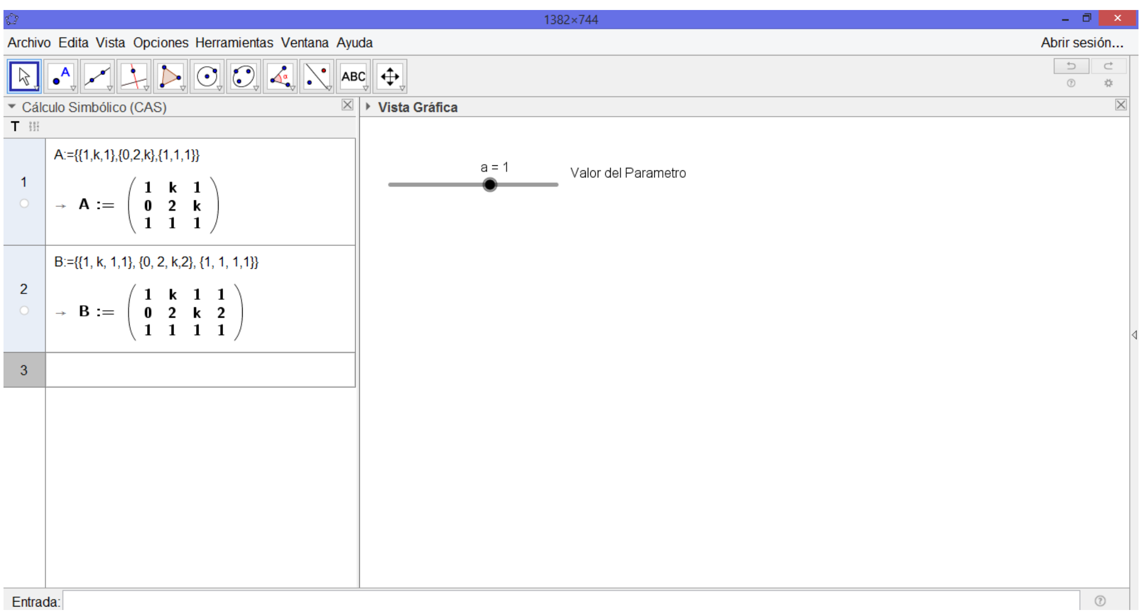
Vamos a resolver con GeoGebra un Sistema dependiente de un parámetro. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ 2y + kz = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Vamos a trabajar tanto con la vista grafica como con la vista CAS. Para ello debemos ir a vistas y dejar las dos vistas en pantalla.



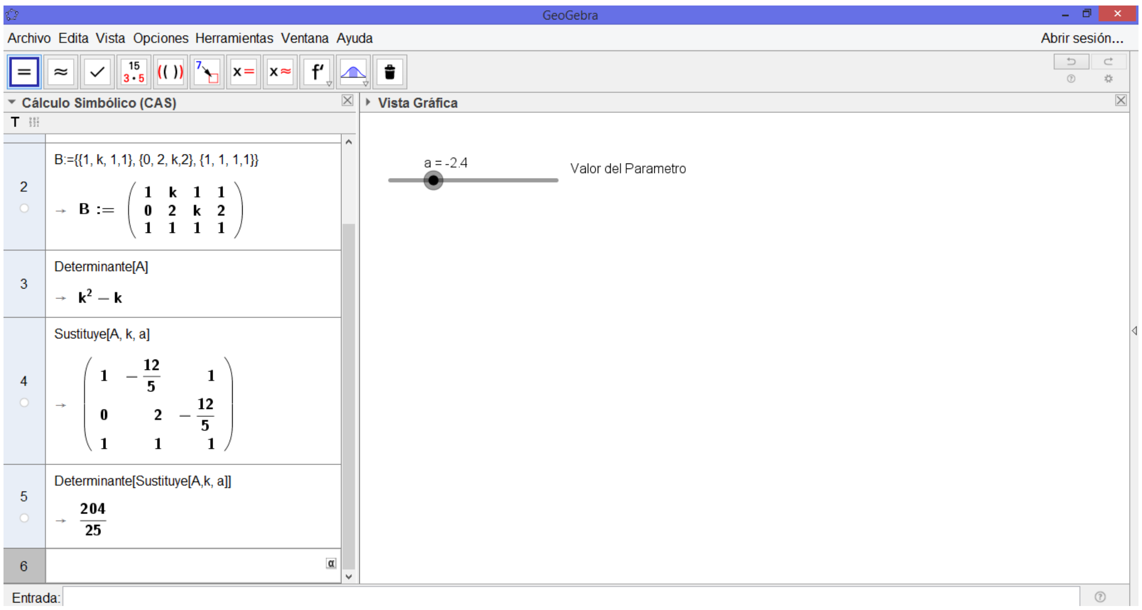
En la vista Grafica vamos a crear un deslizador que llamaremos a, y el cual tomara los valores entre -5 y 5. Escribimos en la vista CAS la matriz A y la matriz B que es la ampliada.



Calculamos el determinante de la matriz A. Por resultado nos devuelve k^2-k. Ahora vamos a estudiar el rango de las matrices en función de los valores k. El valor k lo vamos a reemplazar por el deslizador que hemos creado en la vista gráfica. Para esto lo que vamos a utilizar en la vista CAS será

Sustituye [A,k,a] y luego modificando el deslizador, haciéndolo variar se obtendrán los diferentes valores del determinante de A y B, escribiendo:

Determinante[Sustituye[A,k, a]].



MATRICES

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas.

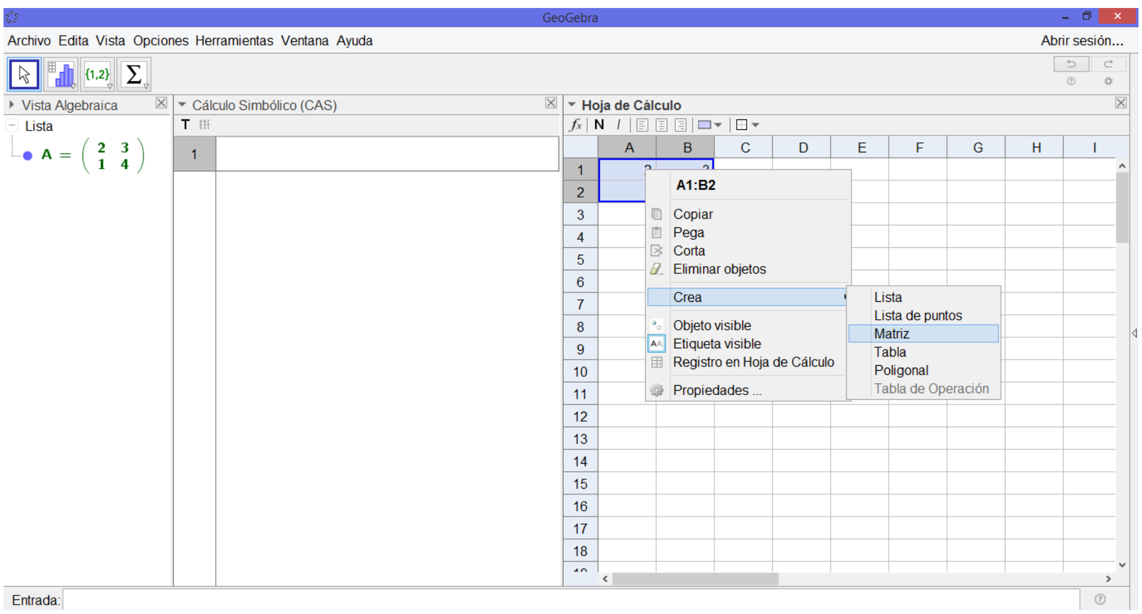
Ejemplo: La matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ tiene orden 3x2 ya que tiene 3 filas y 2 columnas.

OPERACIONES CON MATRICES:

Dentro de las operaciones con matrices con GeoGebra que vamos a trabajar serán la multiplicación de una matriz por un escalar real y la suma y resta de matrices.

Primero deberemos construir las matrices, en estos ejemplos trabajaremos con la vista algebraica, la vista CAS y la hoja de calculo de GeoGebra.

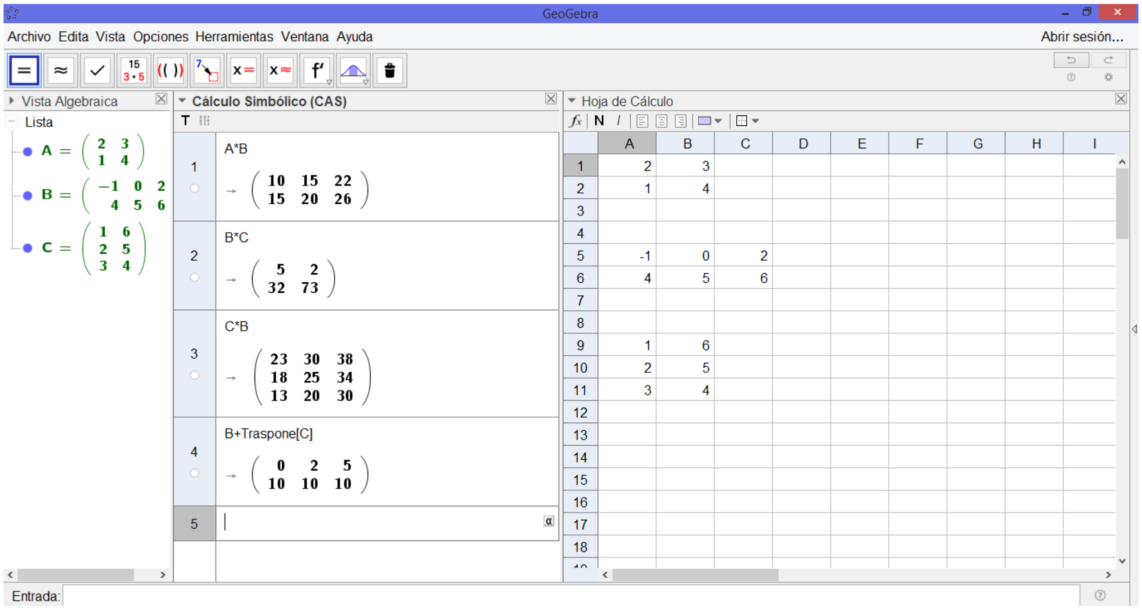
Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. En la hoja de calculo vmaos a introducir los coeficientes de la matriz A y con el boton derecho seleccionamos estos elementos, vamos a la opcion crea matriz y nos crea una matriz que llama Matriz1, podemos verla en la vista algebraica. Vamos a la vista algebraica y renombramos.



De la misma forma crearemos dos matrices mas que llamaremos B y C.

En la vista CAS realizamos las siguientes operaciones:

A*B, C*¨B, B*C, $B+C^t$



Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ utilizando los comandos vistos de GeoGebra decir si se verifica $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Determinante de una matriz

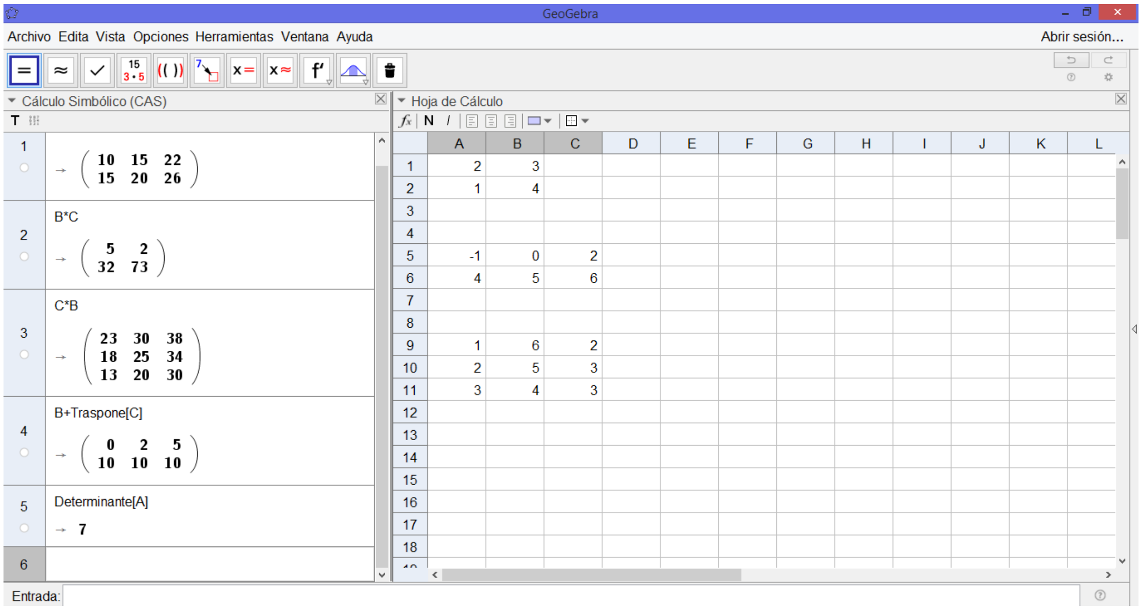
Se puede encontrar el determinante de una matriz A con GeoGebra como vimos antes, utilizando el comando

“determinante[A]”

Ejemplo: Vamos a calcular el determinante de la matriz del ejercicio anterior

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

En la hoja de cálculo introducimos los elementos de la matriz, la cual llamaremos A. Luego, introducimos el comando determinante [A]=7.



INVERSA DE UNA MATRIZ

Se dice que una matriz cuadrada *A* es invertible, si existe una matriz *B* con la propiedad de que

A·B = B·A = I , siendo *I* la matriz identidad.

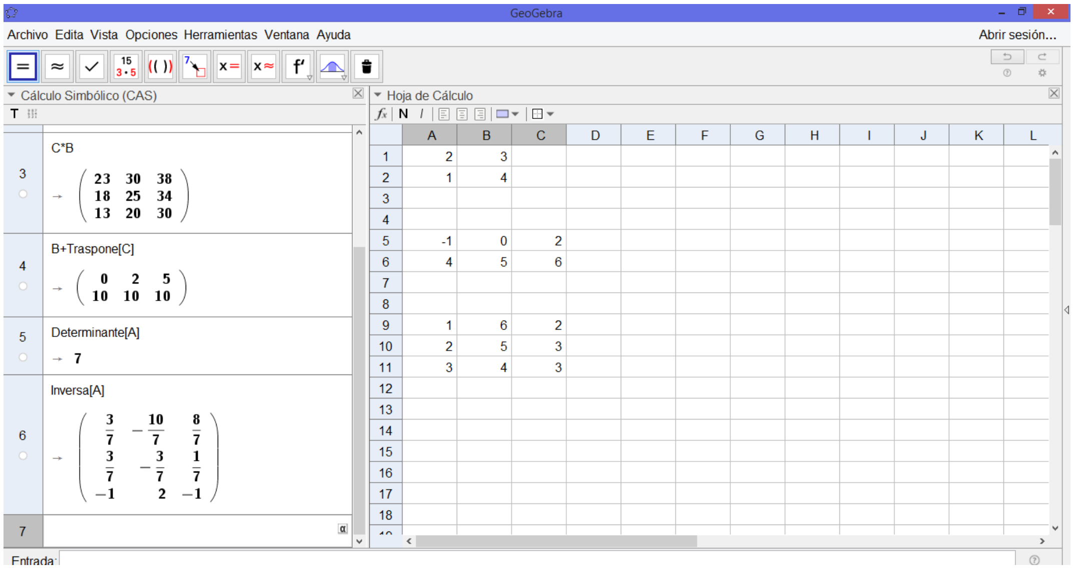
Denominamos a la matriz *B* la inversa de *A* y la denotamos por A^{-1}.

Método con GeoGebra

Para encontrar la matriz inversa con GeoGebra se realiza con el comando

"inversa[matriz]"

Con el ejemplo anterior calculamos la inversa de la matriz A dada.


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Cálculo Simbólico (CAS)
Hoja de Cálculo
C*B
B+Traspone[C]
Determinante[A]
→ 7
Inversa[A]
Entrada:

Para comenzar con este módulo definimos una función real de variable real como una aplicación, *f* que toma elementos de A y les asigna un elemento ***único*** de B. esto se denota como *f*: A$\subseteq R \rightarrow$B$\subseteq R$, donde " $\subseteq R$" significa que A y B son dos subconjuntos no vacíos que se encuentran incluidos en los números reales.

Una de las preguntas que surge intuitivamente al tratar de definir función es, ¿Cuáles son los elementos que definen una función?. Para contestarla, vamos a hablar de los algunos conceptos que interactúan en este concepto.

Decimos que el DOMINIO de una función, es un subconjunto de los números reales en los cuales la función existe y está bien definida.

A=Dom f(x)={x ϵ R, tales que *f(x)* existe y está bien definida*}*.

La IMAGEN o RECORRIDO, es subconjunto de los números reales que se encuentra conformado por los valores devueltos por la definición de la función. Esto es,

B=Img f(x)={y$\in R / \exists \mathrm{x} \in A, \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$*}*.

A "*x*" se le denomina ***variable independiente***, y son todos los valores que se pueden tomar para sustituir en la fórmula de la función dada.

A "*y*" se le denomina ***variable dependiente***, y son los valores que resultan de realizar el cálculo al haber reemplazado "x" en la fórmula de la función dada.

Por lo tanto podemos decir, que una función es, dar una regla de correspondencia o regla de definición, la cual permita asignar a cada elemento de A, un ***único*** elemento *f(x)* de B el cual estará determinado por "x" y la regla de *f*.

La gráfica de la función se encuentra en el plano coordenado, es decir, el grafico está formado por pares (x, y) donde la coordenada $y = f(x)$ y donde los x están en el dominio de la función. En este, como en todos los capítulos del libro utilizaremos el software

GeoGebra, para realizar las representaciones de las funciones y para visualizar cada elemento de los que la componen.

Existen diferentes formas de expresar y representar una función, ya sea como una expresión algebraica o por una gráfica. Además una función puede expresarse en forma explícita ó implícita.

Una función dada en forma ***explícita*** es una función cuya variable dependiente se expresa únicamente en términos de la variable independiente. La forma de éstas funciones están dadas por *y=f(x)*.

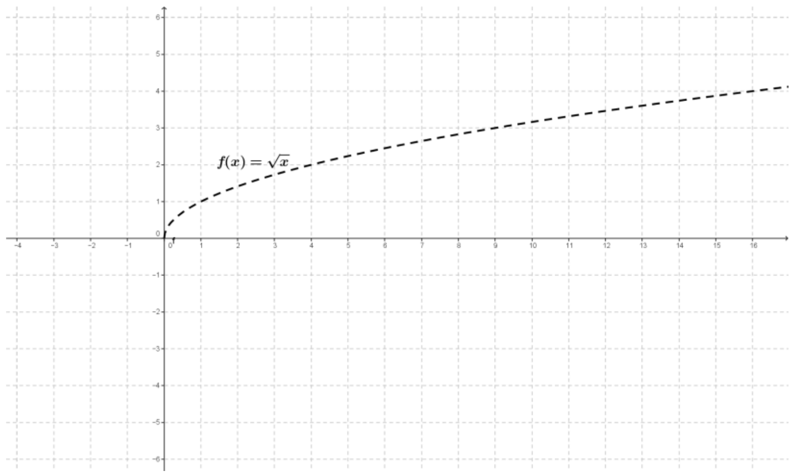
Las funciones dadas en forma ***implícita*** son los casos en que la variable dependiente no está expresada en términos solamente de la variable independiente como en la forma explícita. Un ejemplo de estas funciones es $\frac{3y}{2} - 2x^2 + 3 = 0$ ó por ejemplo $\ln(y) - x = 2$.

Ejemplo: La relación $y = \sqrt{x}$ será una función, si su dominio de definición es el conjunto de los números reales positivos, incluyendo el valor de x=0; ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe. Por lo que podremos escribir:

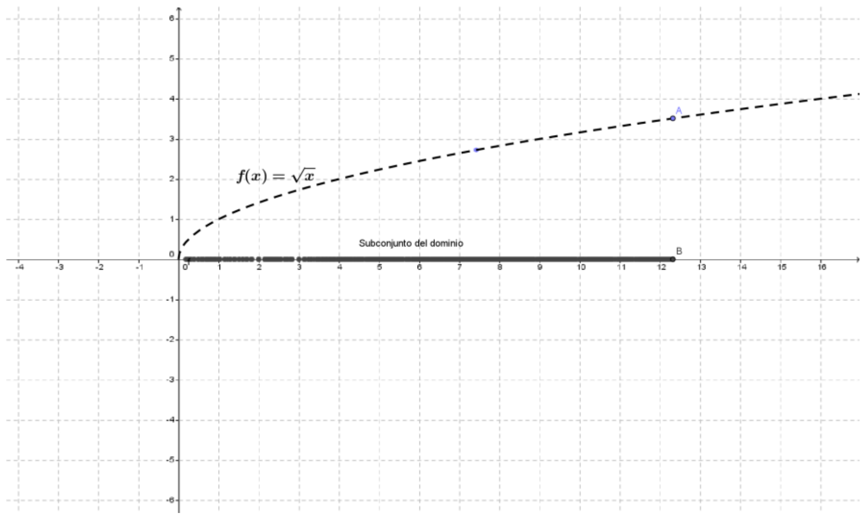
$A = Domf = R_0^+ = [0,+\infty)$.

Para hallar el conjunto imagen, debemos observar el "eje y"; luego $B = \mathrm{Im}\ f = [0,+\infty)$.

Vamos a graficar la función dada utilizando GeoGebra, para ello lo que primero escribimos en la barra de entrada la función, $f(x) = sqrt(x)$. Ver siguiente Figura.

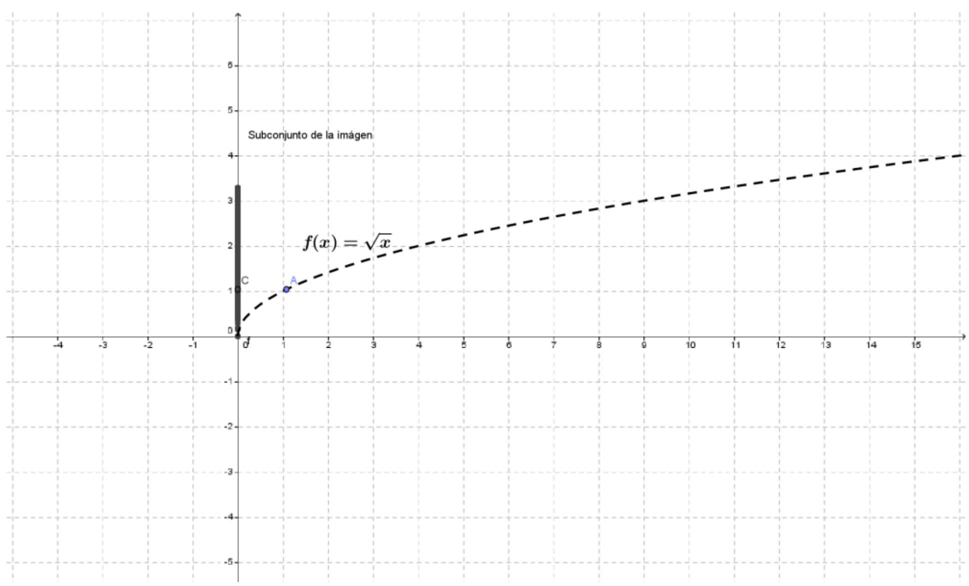


Anteriormente nombramos y definimos dominio e imagen de una función, pero no siempre es fácil de visualizar a éstos dos conjuntos. En este caso se pueden utilizar las herramientas de GeoGebra para resaltar más estos conjuntos, para ello, en primer lugar graficamos la función ejemplo por barra de entrada. Luego nos posicionamos sobre un punto cualquiera en la función, que lo llamaremos **A**. Dicho punto debe quedar marcado sobre la gráfica de la función $f(x)$. Para construir "todos" (o mejor dicho la parte visible) de los puntos que pertenecen al Dominio de f, debemos definir por bandeja de entrada un punto **B**, cuyas coordenadas estarán dadas por, $B = (x(A), 0)$, dicho punto se encuentra bien definido pues estamos mirando solo los puntos del dominio. GeoGebra marcará el punto B, que quedará graficado sobre el eje "x", a continuación lo que haremos será activar su rastro, posicionándonos sobre el punto y haciendo click con el botón derecho, veremos como a medida que movemos el punto A que se encuentra sobre la gráfica de $f(x)$ el rastro del punto B marcara un subconjunto del dominio de la función. Ver siguiente Figura.



Figura

Para obtener el subconjunto Imagen planteamos algo similar, teniendo en cuenta que deberemos crear un punto $C = (0, y(A))$, para luego activar su rastro y al mover el punto A como lo hicimos anteriormente, obtendremos sobre el eje "y" un subconjunto del conjunto imagen. Ver Figura que sigue.



Figura

Tipos de funciones

Existen distintos tipos de funciones, éstas se clasifican según las características de la expresión.

Funciones algebraicas:

En las funciones algebraicas las operaciones que se realizan con la variable independiente son la adición, la sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

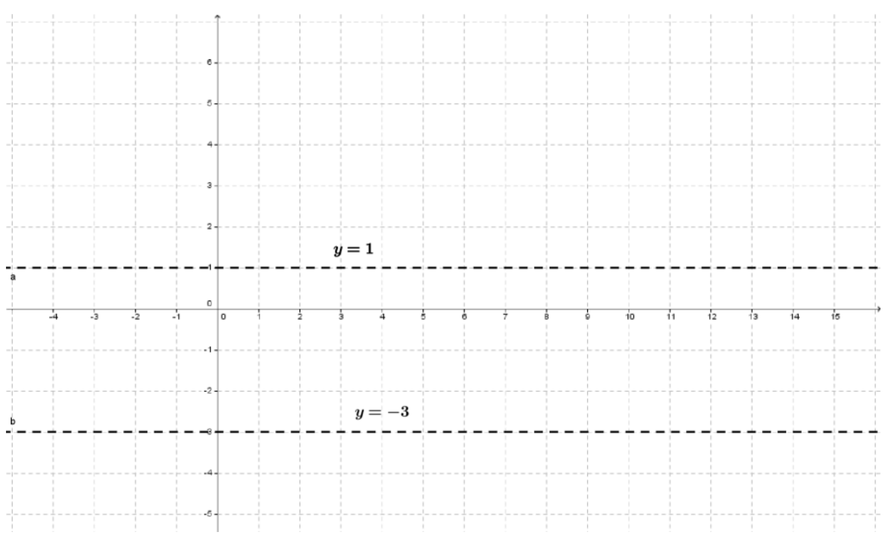
Funciones polinómicas:

Son las funciones que vienen definidas por un polinomio, de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Funciones constante

Son las funciones que vienen definidas por $f(x) = k$ donde k es una constante real. A continuación en la Figura, se pueden observar varios ejemplos de éstas funciones. Cuando $k = 1, k = -3$.



Figura

Función polinómica de primer grado ó función lineal.

La función lineal o de primer grado es una función del tipo polinómica que tiene la forma: $f(x) = mx + b$, donde a "m" se llama *pendiente* y "b" es la *ordenada al origen* de dicha función.

A las funciones lineales se la representa *gráficamente* como una recta. En este tipo de funciones, tanto su dominio como su imagen son, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Toda recta está determinada por exactamente dos puntos, pero ¿Cómo se puede hallar la ecuación analítica de una recta dados dos puntos que pertenezcan a ella?

Sean $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ dos puntos que pertenecen a una recta cualquiera, cuya ecuación queremos hallar, entonces podemos encontrar su vector director haciendo:

$v = (v_1, v_2) = (\ x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ (1).

Armando la ecuación cartesiana de la recta se tiene:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Luego, $(x - x_0).v_2 = (y - y_0).v_1$ .Despejando obtenemos la ecuación explícita de la recta: $y = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0) + y_0$.

Si denominamos $m = \frac{v_2}{v_1}$, entonces, $y = m.(x - x_0) + y_0$ (2)

En (2) se puede observar la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente m.

Sustituyendo los valores de (1) en lo anterior obtenemos:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (3).$$

A (3) se le llama *ecuación de la recta que pasa por dos puntos*.

Para poder graficar una función lineal, alcanza con conocer *dos* de sus puntos. En particular, éstos dos puntos pueden ser aquellos, donde la recta corta a los ejes coordenados x e y.

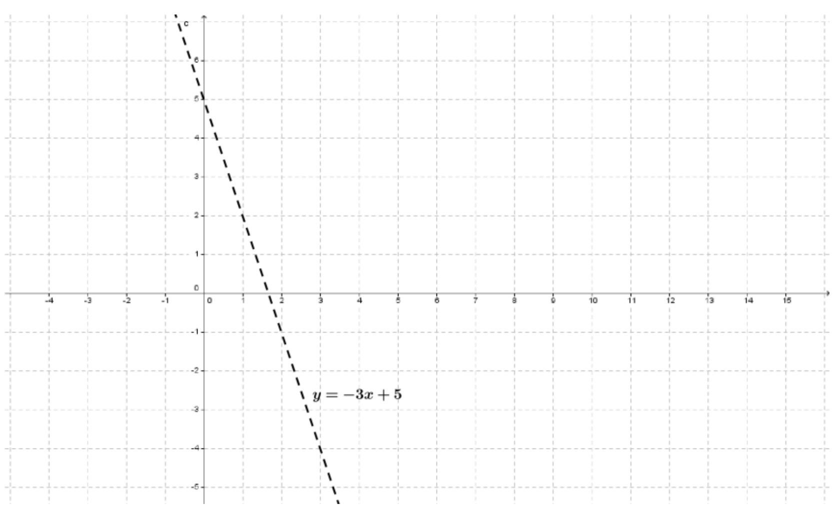
El punto donde la gráfica de la recta corta al eje de las abscisas se denomina *Cero* o *Raíz*, y su expresión general es el punto $(x, 0)$, mientras que el punto donde la recta corta al eje de ordenadas se denomina *Ordenada al Origen*, y su expresión general es de forma $(0, y)$.

<u>Ejemplo:</u> Graficar la recta que tiene por ecuación $y = -3x + 5$.

Para obtener analíticamente el punto por donde la recta corta al eje "x", hacemos $y = 0$, con lo cual nos queda la siguiente ecuación $-3x + 5 = 0$. Al resolverla obtenemos que el valor de $x = \frac{5}{3}$. Luego el cero o raíz de esta función será el punto cartesiano $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

Para obtener el punto por donde la recta corta al eje "y", hacemos $x = 0$, nos queda entonces $y = -3.0 + 5 = 5$, luego $y = 5$. Por lo tanto la ordenada al origen será el punto $(0,5)$.

Utilizando GeoGebra, lo que se hace es marcar en la barra de herramientas estos puntos y luego con la herramienta, *recta que pasa por dos puntos*, tal como muestra la Figura y quedará graficada la recta.

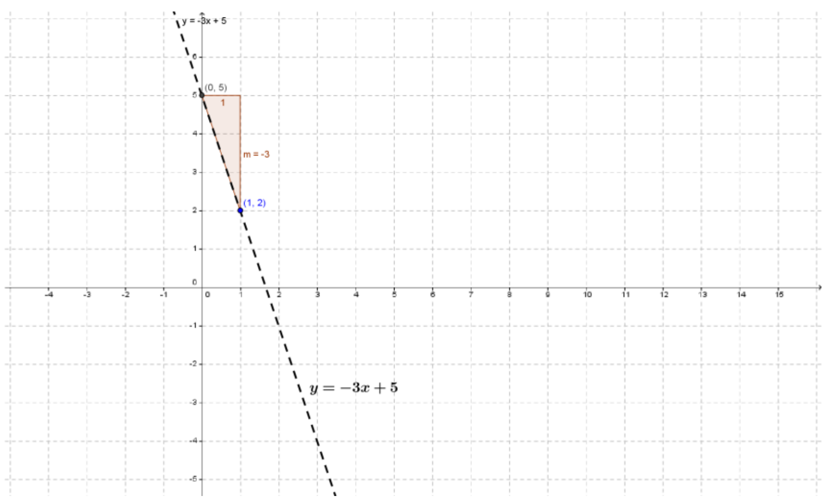


Figura

Con GeoGebra se pueden hallar los puntos de intersección con los ejes utilizando la herramienta intersección de objetos, para el cero se marca la recta y el eje x y para la ordenada la recta y el eje y.

También se puede representar una recta utilizando su pendiente y su ordenada al origen. Es decir, marcamos el valor de b (ordenada al origen) sobre el eje y, es decir el punto de coordenadas $(0,5)$.

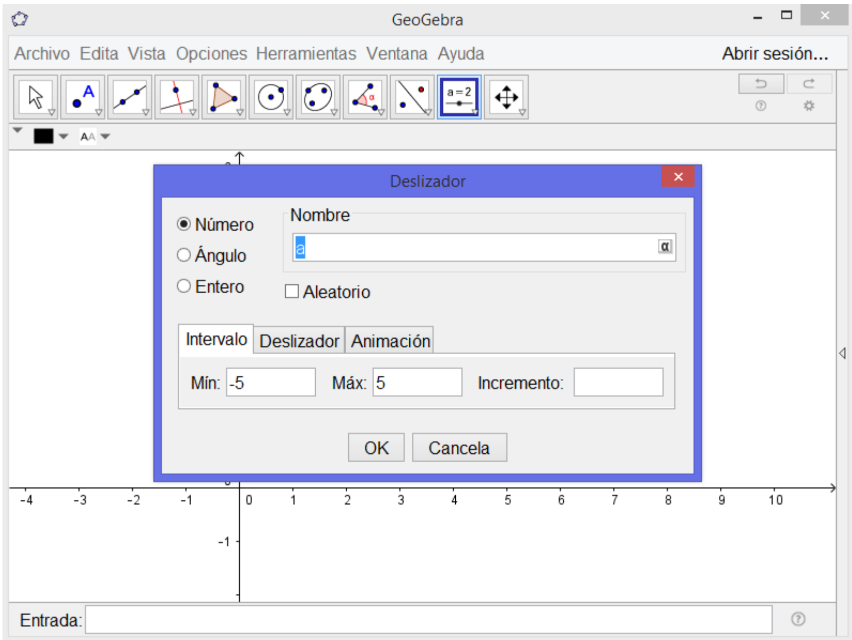
A partir de ese punto, como la pendiente es $-3 = -\frac{3}{1}$, se toma una unidad a la derecha y tres unidades hacia abajo, así se obtiene el punto $(1,2)$. Uniendo ambos puntos, tal como lo nombramos arriba se obtiene la gráfica de dicha recta.



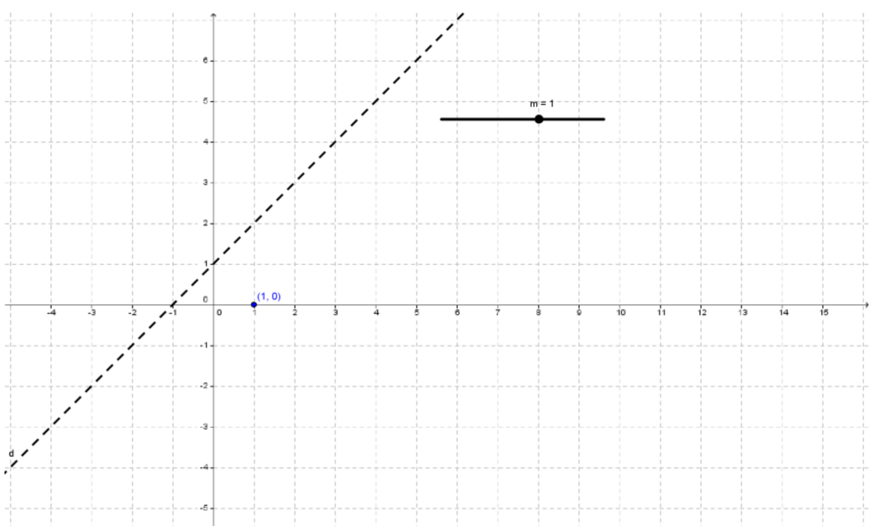
Figura

A continuación trabajaremos con una herramienta que utilizaremos bastante aquí. Supongamos que queremos graficar todas las rectas que pasan por un punto, por ejemplo por el punto $(1,0)$.

Marcamos el punto con GeoGebra y luego, vamos a la herramienta deslizador como vemos en la figura.



Creamos un deslizador que llamaremos "m". Planteamos en la barra de entrada $y = mx + 1$. Ver Figura.



Figura

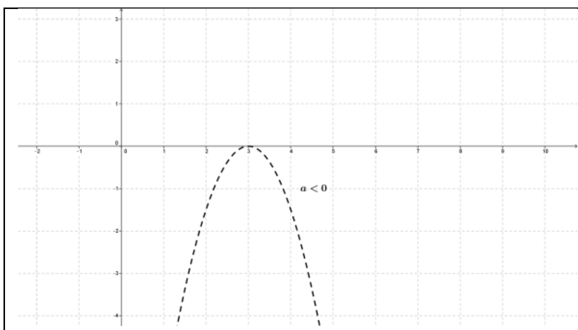
Luego moviendo el deslizador m, se pueden observar todas las rectas que pasan por el punto (1,0).

Funciones de segundo grado:

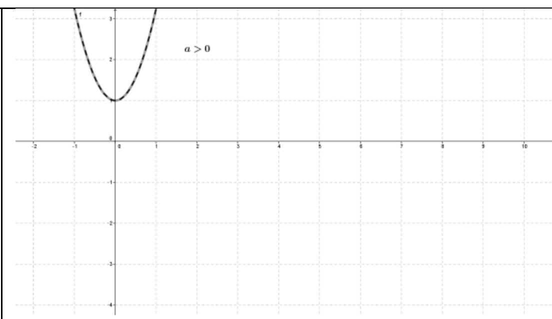
Las funciones cuadráticas, son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica en el plano, una *parábola*. Su dominio es el conjunto de los números reales. Mientras que su imagen dependerá del vértice de la función. Se retomara mas adelante en el modulo de geogmetria como construir la parábola con la definición de lugar geométrico.

Éstas funciones tienen la forma, $f(x) = ax^2 + bx + c \;\; con\; a \neq 0$, donde "$a$" se llama término ***cuadrático***, "b" **término *lineal*** **y** "c" **término *independiente*.**

La grafica de una parábola, que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$**,** puede ser alguna de las siguientes:



Figura



Figura

Tal como se explicó con la función lineal, también se pueden encontrar las raíces o ceros de la función cuadrática, para resolverla utilizamos el CAS de GeoGebra, introduciendo:

ResoluciónC[a*x^2+b*x+c=0] introduciendo sus respectivos valores a, b y c.

Además de las raíces de la parábola, existen otros puntos característicos como la ordenada al origen, éste punto tiene coordenadas $(0, f(0))$ como vimos anteriormente. Podremos hallar dicho punto utilizando la herramienta evaluación de GeoGebra.

Otro punto que las caracteriza, es su vértice, éste punto es donde la función cuadrática alcanza su valor máximo o mínimo, dependiendo de si $a < 0$ o si $a > 0$ respectivamente. Dicho punto tiene la forma $\left(x_v, f(x_v)\right)$. Para hallar las coordenadas se realiza: $\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a}}$ **ó** $\boldsymbol{x_v = \frac{x_1+x_2}{2}}$**,** donde x_1 y x_2 son las raíces de la función cuadrática.

Es importante hallar el vértice de las parábolas ya que con éste se puede hallar el conjunto Imagen de la función cuadrática que se está estudiando. Su conjunto imagen será un intervalo de la forma $[f(x_v), +\infty)$ ó $(-\infty, f(x_v)]$, dependiendo si $a > 0$ o $a < 0$ respectivamente.

<u>Ejemplo</u>: Graficar la función $f(x) = -x^2 + 5x + 3$, hallando los puntos característicos.

Para calcular los Ceros resolveremos en GeoGebra utilizando el CAS, escribimos:

ResoluciónC[-x² + 5x + 3 = 0].

Luego con el botón derecho podremos elegir entre varias opciones para copiar y pegar el resultado obtenido. En éste caso elegimos Copia como imagen y tendremos las coordenadas de ambas raíces que las llama lista:

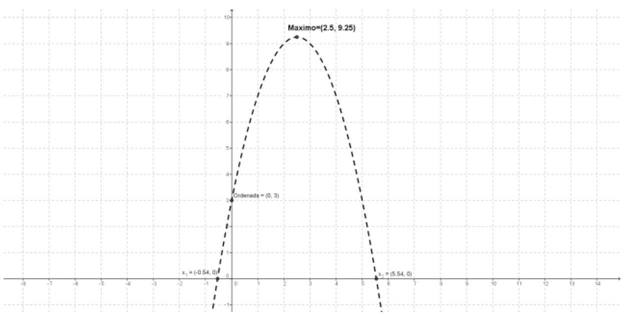
$$\textbf{lista1} := \left\{ \left(\frac{-\sqrt{37}+5}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{37}+5}{2}, 0 \right) \right\}.$$

Lo que se puede hacer también para obtener los ceros con GeoGebra es, en primer lugar graficar la función cuadrática, escribiendo en la barra de entrada $f(x) = \boldsymbol{-x^2 + 5x + 3}$ y luego se utiliza la herramienta *intersección de dos objetos*, donde los objetos serán, la función $f(x)$ y el eje x.

Para calcular la ordenada al origen, también se puede hacer de dos maneras utilizando GeoGebra, una es utilizando nuevamente el CAS, con la herramienta sustituir, para la cual escribimos la ecuación cuadrática y sustituimos por 0 el valor de x. Y la otra manera será, si se tiene graficada la parábola utilizando la herramienta intersección de dos objetos, donde los objetos ahora serán, la función cuadrática y el eje y. Luego la ordenada al origen es el punto de coordenadas $(0{,}3)$.

El vértice de la parábola, es $x_v = \frac{5}{-2} = 2.5$ $y\, f(x_v) = f(2.5) = 9.25$. Luego el vértice tiene coordenadas $(2.5\,; 9.25)$.

La gráfica de la parábola en la Figura siguiente.

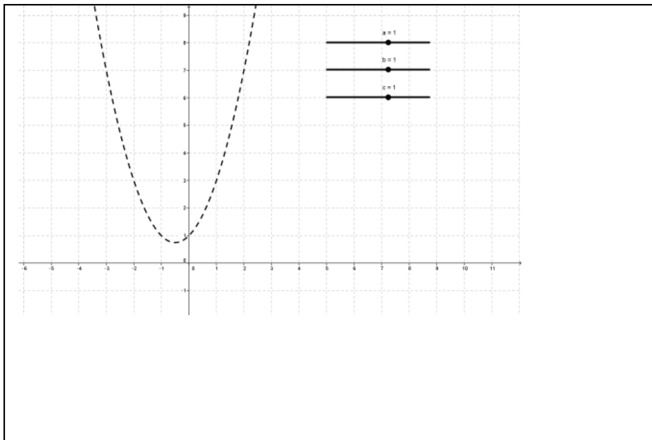


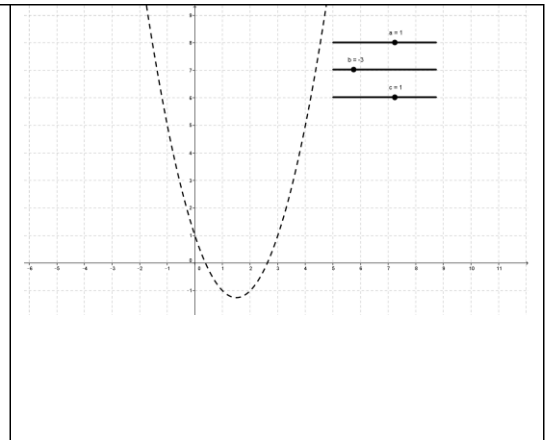
Figura

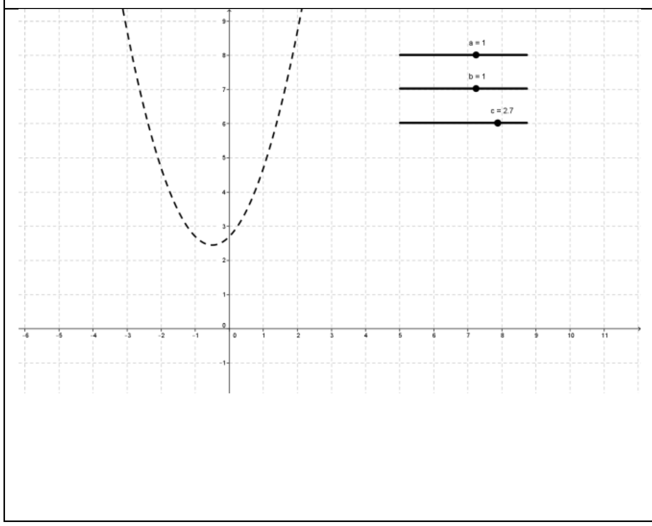
Teniendo en cuenta lo visto anteriormente se puede concluir que el $Domf = \mathbb{R}$ y su $Imf = (-\infty, 9.25]$.

En lo que sigue crearemos con GeoGebra tres deslizadores que llamaremos "a", "b" y "c", que podemos hacer que varíen en el intervalo [-5, 5], graficaremos las funciones de la forma

$y = ax^2 + bx + c$, relacionando los coeficientes de la función cuadrática con los deslizadores creados. Luego, al mover cada uno de éstos deslizadores se podrá ver cómo influyen los coeficientes en la gráfica de las parábolas. Ver las siguientes tres figuras que se muestran a continuación.



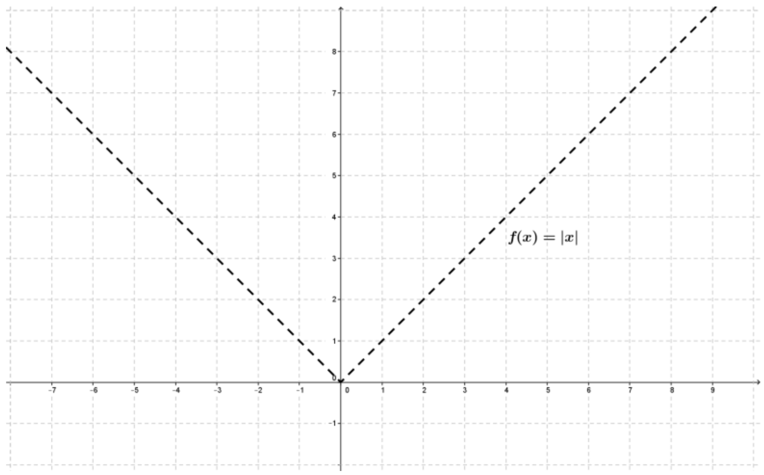




La función valor absoluto o también llamada módulo se representa de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función es simplemente una función a trozos o por partes. Para graficar con GeoGebra, escribimos en la barra de entrada: *f(x)=abs(x)*.



Figura

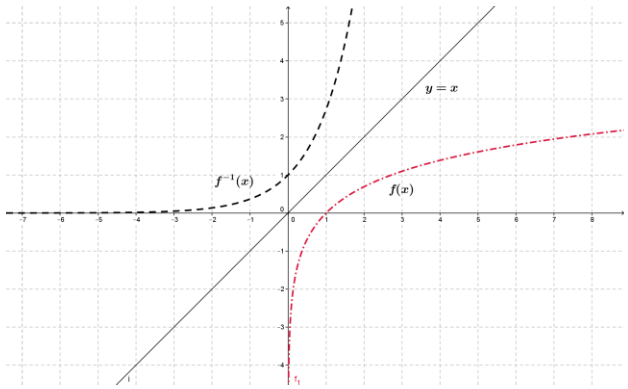
Su *dominio* es el conjunto de números reales $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y su *imagen* es el intervalo $[0,+\infty) = \mathbb{R}_0^+$.

Función inversa

Dada una función $y = f(x)$, se llama función inversa de f y se denota por f^{-1} a otra función tal que para cualquier valor del dominio de f se cumple que:

$(fof^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}\,of)(x) = x$.

Esto quiere decir que las gráficas de una función y la de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$.



Figura

Observemos que, no todas las funciones tienen función inversa; para que esto ocurra la función f debe satisfacer una condición, el ser biyectiva, para llegar a este concepto definiremos antes dos términos.

Definición: Una función se dice que es ***Inyectiva***, si para cualquiera dos valores del dominio, diferentes entre ellos, $\forall\, x_1, x_2 \in Domf$ tal que $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definición: Una función se dice que es ***sobreyectiva*** si para cualquier elemento y, existe un elemento x del dominio de la función tal que $y = f(x)$.

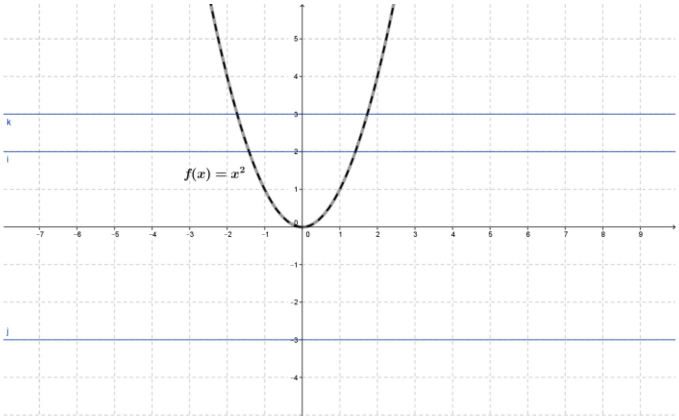
Dicho de otra manera se tiene que $\forall\, y \,\epsilon Imf, \exists x \in Domf\ tal\ que\ y = f(x)$.

Definición: Una función es ***Biyectiva*** cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Definición: una función f admite función inversa si f es una función biyectiva.

Ejemplo: Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ decir si posee inversa. De no ser posible redefinir $Domf$ y Imf para que posea inversa.

Comencemos haciendo la gráfica de f, para poder analizar la inyectividad y la sobreyectividad.

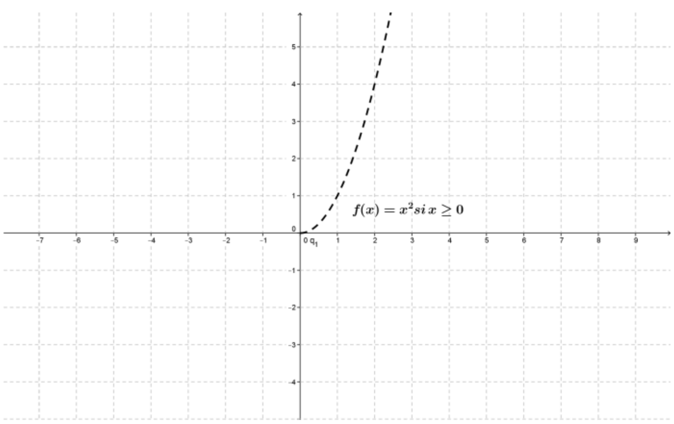


Figura

Habiendo trazado las rectas horizontales, podemos decir que f no es inyectiva. Es decir que para valores distintos del $Domf$, las imágenes de éstos elementos son iguales.

También podemos afirmar que f no es sobreyectiva. Por lo tanto f así definida no es biyectiva.

Para que f sea biyectiva deberíamos redefinir $Domf\ y\ Img$ lo cual gráficamente seria tomar una sola rama de la función f.



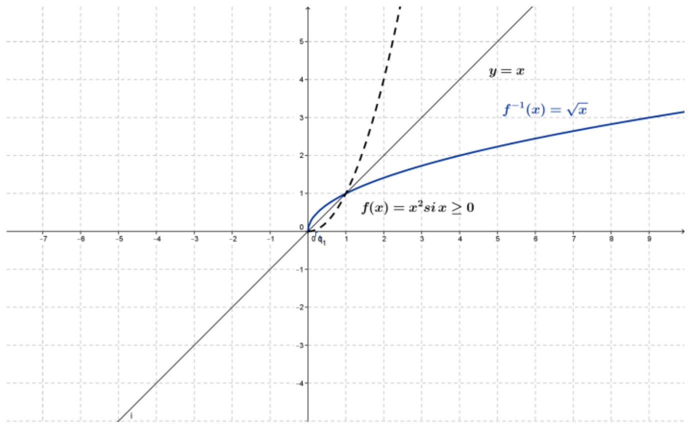
Figura

Esta redefinición hace que f sea biyectiva, cuando $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, por lo que podremos encontrar su inversa f^{-1} de la siguiente manera:

Tomamos $y = x^2$ despejamos la variable “x” luego se tiene, $x = \sqrt{y}$. Cambiamos las variables entre si, y=$\sqrt{x}$.

Por lo tanto $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Al graficar ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas y también la función identidad, $y = x$ se puede observar la simetría que existe entre ambas funciones respecto de *y*=*x*.



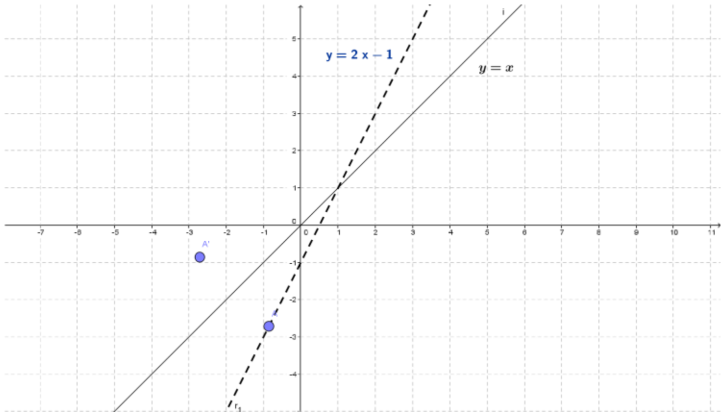
Figura

La pregunta que nos surge es: ¿Es posible "generar" gráficamente la función inversa de una función biyectiva dada utilizando algunas herramientas de GeoGebra?

Para construir la función inversa utilizamos la función $y = x$, pues ya sabemos que f^{-1} es una *reflexión* de la función f respecto a la función identidad.

Para comenzar con esta construcción hacemos los siguientes pasos.

En la bandeja de entrada escribimos $y = x$, luego la función a la que queremos construir su inversa; por ejemplo, será $f(x) = 2x - 1$. Marcamos un punto perteneciente a la función f, al cual designamos como A, elegimos la herramienta "**Refleja Objeto en Recta**", seleccionamos el punto A y luego la recta *y*=*x*; obteniendo así un punto que GeoGebra llamará A'. Sobre A' seleccionamos activar rastro, (esto como vimos anteriormente se realiza posando sobre el punto y luego con el botón derecho aparece una ventana donde se encuentra activar rastro). Por último, movemos el punto A y veremos como A' traza una "*recta*", la cual se encontrará sobre la gráfica de $f^{-1}(x)$. Tal como se ve en la Figura que sigue.



Figura

Aplicaciones de las Derivadas.

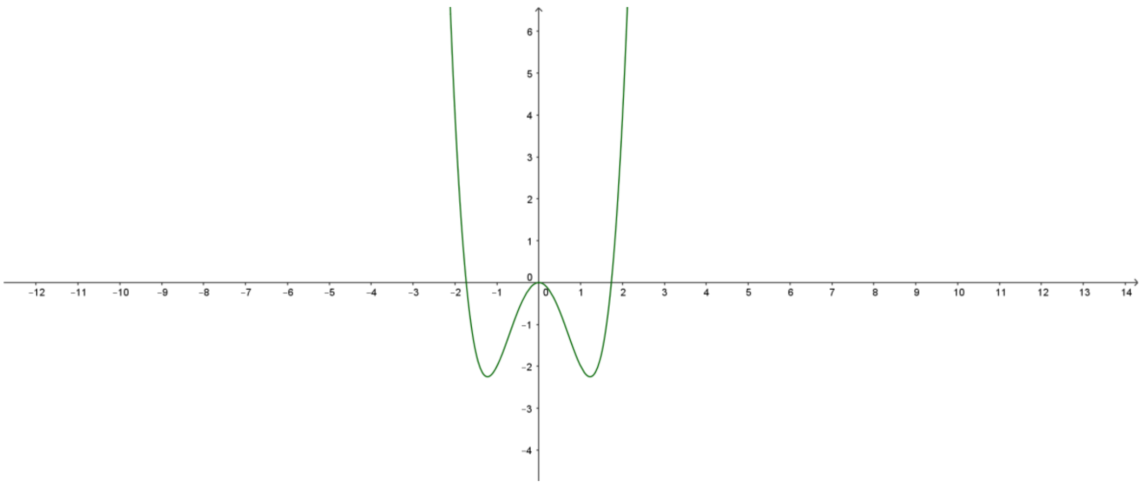
En la busqueda de máximos y mínimos uno de los primeros problemas en la historia ha sido contestar la pregunta ¿Cuales son la distancia mínima y máxima de un planeta al Sol?. El primer trabajo sobre este problema es de Kepler (1571-1630), quien tuvo que diseñar cubas de vino de manera que tuvieran la máxima capacidad, lo cual motivó su estudio sobre la cuestión. Encontró que el paralelepípedo de base cuadrada y volumen máximo inscrito en una esfera es el cubo (lo obtuvo midiendo muchas formas distintas). Lo esencialmente importante es su comentario de que, al acercarse al valor máximo, para un cambio fijo en las dimensiones, el volumen crece cada vez más lentamente. La lectura actual de este hecho es que la derivada se anula en un máximo relativo. Fermat parece que da un método de hallar extremos por medio de lo que él denomina “pseudoigualdades”. Afirma que en un punto se alcanza un máximo si para un incremento infinitesimal de la variable la función no varia. La esencia es semejante a la ya comentada sobre el problema de la tangente.

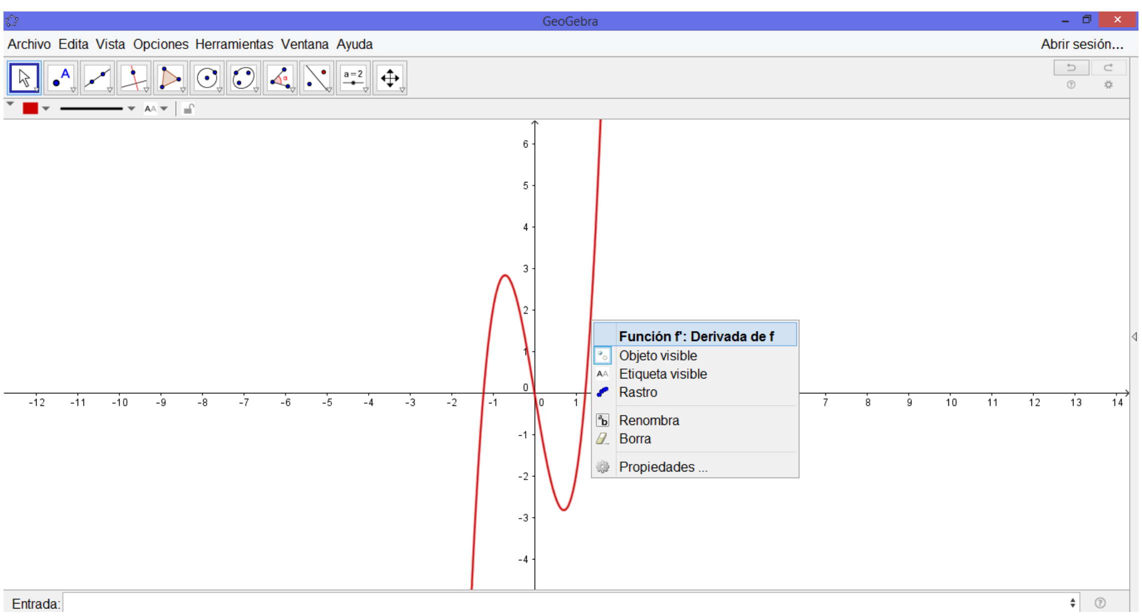
Las actividades que se plantearon en éste modulo tienen que ver con la aplicación de los criterios de la derivada primera y de la derivada segunda en la obtención de sus valores extremos.

La importancia y delimitación del campo de la modelización en la educación matemática han sido puestas de manifiesto por diversos autores. Además, la diversidad de trabajos de investigación en esta área y la introducción de cursos y propuestas curriculares para su uso, otorgan a la modelización un marco conceptual para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles. Tal como lo expresa[1], las modificaciones que se han incorporado a los currículos en algunos países han sido dirigidas hacia una introducción del Análisis Matemático más intuitiva y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^4 - 3x^2$, vamos a calcular con GeoGebra su derivada. Para ello utilizaremos la herramienta Derivada[f(x)].





[1] Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

Vamos a elegir la herramienta Nuevo punto y construir un punto A sobre el eje x, para verificar que se encuentra en este eje, movemos el punto y éste no debe salirse del eje x.

Vamos a escribir ahora en la barra de entrada B=(x(A), -2), C=(x(A), f(x(A))) y a=sgn(derivada(x(A)).

Al mover el punto A se puede observar en la ventana algebraica que el valor de a es 1 si la función es creciente y -1 si la función es decreciente.

Ahora vamos a escribir en la barra de entrada b=0,5*a+0,5. El valor de b será 0 si la función decrece y 1 si la función crece.

Luego sobre el punto B hacemos clic con el botón derecho y elegimos la opción Propiedades, vamos a avanzado, allí pondremos colores dinámicos, en la entrada donde dice rojo escribiremos la letra b, y en las demás casillas pondremos 0.

Luego movemos el punto A para observar que el color del punto B cambia si la función es creciente o decreciente.

Sobre el punto B haremos clic con el botón derecho y activaremos rastro activaremos el rastro con el botón derecho, el resultado al mover el punto A.

<u>Ejemplo</u>:

Todo problema suele requerir para su solución estratégica poner en juego destrezas previamente adquiridas. Una planificación y control de la ejecución, y el conocimiento sobre los propios procesos psicológicos (metaconocimiento), lo que implica el uso selectivo de los propios recursos y capacidades disponibles (Pozo y Postigo, 1994). No obstante la puesta en marcha de una estrategia (como por ejemplo, formular y comprobar una hipótesis) requiere dominar técnicas más simples (desde aislar variables a dominar los instrumentos o registrar por escrito lo observado, etc.). De hecho, el uso eficaz de una estrategia, depende en buena medida del dominio de las técnicas que la componen. Identificar necesidades y demandas de su contexto[2].

El siguiente ejemplo aborda un problema de optimización presentado en un congreso, desde dos diferentes enfoques, el analítico y el que denominamos dinámico. El primero, utilizando las herramientas de un curso de nivel medio y el segundo utilizando el software GeoGebra.

La importancia y delimitación del campo de la modelización en la educación matemática han sido puestas de manifiesto por diversos autores[3]. Como referencia para analizar el problema se han tomado dos autores. El *Problema*, (según Larson, R. Hosteler, R. Edwards, B.) dice:

De todos los triángulos isósceles de 12 cm de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima.

En el enfoque analítico que se realiza en la resolución del problema, se obtiene buscando un modelo matemático, se encuentran los puntos que satisfacen el modelo para luego concluir si los mismos son extremos, un máximo en este caso y en consecuencia, la mayor área del triángulo en cuestión. La función que tenemos que maximizar es el área del triángulo, entonces:

Sea y uno de los lados iguales del triángulo, y llamemos x el lado desigual. La condición del problema dice que el perímetro del triángulo es de 12 cm. Por lo que

$P= x+2y=12$

Relacionando las variables obtenemos que: $x + 2y = 12 \rightarrow x= 12-2y$

[2] Planteo de situaciones problemáticas como estrategia integradora en la enseñanza de las ciencias y la tecnología.

[3] Citado de: Uso de la modelización matemática en actividades didácticas. Análisis de una situación problema.

A continuación el área del triángulo queda expresada por:

$A = x.\frac{\sqrt{y^2 - (x/2)^2}}{2}$. Si sustituimos la relación hallada anteriormente se obtiene:

$$A = (6-y).\frac{\sqrt{y^2 - (6-y)^2}}{2}$$

$$A = (6-y).\frac{\sqrt{y^2 - 36 + 12y - y^2}}{2}$$

$$A = (6-y).\frac{\sqrt{-36 + 12y}}{2}$$

Al derivar e igualar a cero y calcular el valor de y, obtenemos:

qué *y=4*, con éste valor encontramos el valor de *x* y obtenemos que *x=4*, por lo que el triángulo de área máxima sería un triángulo equilátero.

En el enfoque dinámico es cuando analizamos el problema aplicando GeoGebra, surge una cuestión interesante en la función A, que no se tiene en cuenta a la hora de analizarlo desde el enfoque analítico. Para crear el triángulo con GeoGebra hay que escribir la relación entre x e y.

Podemos observar claramente que en el enfoque analítico el área del triángulo que se obtiene es una sola, como así también solo se puede realizar la gráfica de una función A por vez, sin identificar que la familia de funciones que surgen a medida que varían los lados de los triángulos.

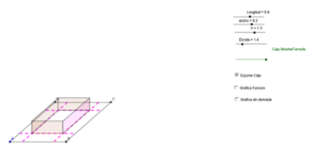
Mientras que en el enfoque dinámico vemos que se ponen a funcionar elementos y propiedades que no se explicitan en el contexto analítico, por ejemplo, se pueden incorporar deslizadores para y, luego como x depende de y, a medida que varía el primero también lo hace el segundo y así se pueden ver como se barren las diferentes áreas. El análisis que se realiza con GeoGebra es mucho más refinado que el realizado analíticamente.

No pretendemos tomar partido por el enfoque analítico o el dinámico, cada uno de los enfoques tiene cuestiones interesantes para abordar y que deben complementarse entre sí, permitiendo así su coexistencia.

Ejemplo: Situación de optimización tradicional en análisis matemático analizada dinámicamente.

Los dos autores tomados de referencia nuevamente para abordar éste problema son, según Larson, R. Hosteler, R. Edwards, B,:

El Problema: Se desea construir una caja abierta de volumen máximo, a partir de una pieza de cartón cuadrada de 24 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas (véase Figura).



Luego el autor, escribe una serie de sugerencias, para que el alumno tenga en cuenta a la hora de su resolución:

* Pide que exprese el volumen V como función de x. Donde x es el valor que el alumno asigna al lado del cuadrado de cartón que se va a ir quitando de las esquinas.

* A continuación se comenta que utilice las herramientas del cálculo, para hallar el punto crítico de dicha función y que encuentre su valor máximo.

Se requiere que con algún software grafique esa función y verifique en la gráfica el volumen máximo. Por último solicita resolver para una pieza de ***s*** metros de lado y pregunta: Si las dimensiones de la pieza cuadrada se doblan, ¿Cómo cambia el volumen? Esto, ya se encuentra más abocado a la generalización.

J. Stewart. Enuncia de igual manera el *problema*, sólo que utiliza como medida de los lados del cartón, *pies*. Solicita al alumno que: dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras altas con bases pequeñas. Suponiendo que el alumno va tomando distintos valores para recortar las esquinas. A continuación pide, que encuentre el volumen de varias de esas cajas y pregunta: ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.

Aquí no se realizarán críticas a cada una de las sugerencias y cuestiones enunciadas por los autores, para orientar al alumno a resolver el problema. Sólo nos limitaremos a describir el trabajo realizado desde las dos resoluciones que proponemos, la analítica y el dinámico.

En el enfoque analítico que se utiliza en la resolución del problema, son las herramientas del Análisis Matemático, para ello se encuentra el modelo matemático que relaciona el volumen como función del lado del cuadrado extraído de las esquinas del cartón, luego se encuentran el punto crítico del modelo y se aplican los criterios de derivada para concluir si dicho punto es un máximo y en consecuencia, el máximo volumen de la caja que es lo que se está buscando.

Habiendo realizado el gráfico de la situación, llamamos *x*, al cuadrado que se quita de cada una de las esquinas del cartón. Luego, cada lado del cartón, tiene una longitud de 24 – 2.x, pues se considera un cartón cuadrado. Una vez que tenemos la longitud de cada lado se plantea la función volumen, en términos de la variable x. Dónde:

Base= 24-2.x Ancho=24-2x y Altura=x

Entonces,

$$V = (24-2x).(24-2x).x \Rightarrow V = (24-2x)^2.x$$

Ahora a partir de la función V, calculamos la derivada primera, la igualamos a cero para obtener el/los puntos críticos.

$$V' = 2.(24-2x).(-2).x + (24-2x)^2 \Rightarrow V' = -96x + 8x^2 + 576 - 96x + 4x^2$$
$$V' = 12x^2 - 192x + 576 \quad \text{luego} \quad V' = 0 \qquad x_1 = 12, x_2 = 4$$

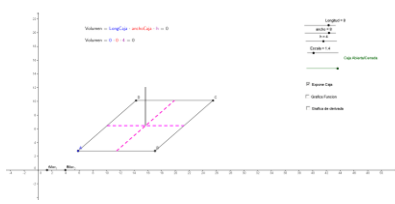
De los puntos críticos hallados, se tiene:

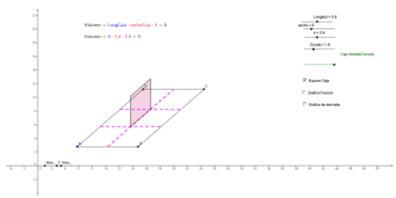
$$V''(x) = 24x - 192 \Rightarrow V''(12) = 96 > 0 \Rightarrow V''(4) = -96 < 0$$

Observemos que para *x=12* no tiene sentido el cálculo del volumen, dejamos en claro que luego de hallar la solución analítica debemos contextualizarla. Y además que el dominio de la solución estará acotado de acuerdo a las longitudes dadas del cartón.

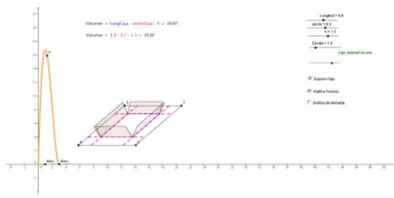
Concluimos entonces que, cuando se saca un cuadrado de cada esquina del cartón, de 4 cm de lado, el volumen de la caja será máximo.

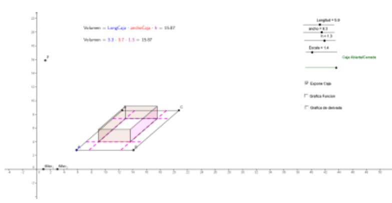
Cuando analizamos el problema aplicando GeoGebra, es decir desde el enfoque dinámico, surge una cuestión que no se tiene en cuenta a la hora de analizarlo desde el enfoque analítico. Para crear la caja, tendremos que tener en cuenta el valor de cada cuadrado x, la altura de la caja, dependerá de la longitud de cada lado del cuadrado de cartón que se considera, pues sino, no se formará la caja. Véanse las siguientes Figuras.





El problema se vuelve muy interesante con el software si se hace variar las dimensiones de la caja, es decir si se considera en vez de un cartón cuadrado, un cartón rectangular, así podrá generalizar el problema. En éste proceso de generalización se deberá poner especial énfasis en el dominio de definición de cada uno de los lados, como así también el dominio de x.





En el enfoque analítico la caja se ve y es una, como así también solo se puede realizar la gráfica de una función V, sin ver la familia de funciones que surgen a medida que varían los cuadrados de cartón.

Mientras que en el enfoque dinámico se ponen a funcionar elementos y propiedades que no se explicitan en el contexto analítico, por ejemplo, la necesidad de tener de antemano el dominio de definición de la variable x, cuando consideramos un cartón cuadrado y el dominio de los lados del cartón si se considera de forma rectangular.

Ejercicios Propuestos.

1) Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m2 de superficie, para

Poderlo cercar con una valla de longitud mínima.

2) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una Circunferencia de radio 5 cm.

3) Una hoja de papel debe contener 18 cm2 de texto impreso. Los márgenes superior e Inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo?

4) Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

5) Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7,5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.

6) Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) Determinar el coste del marco.

En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

7) Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material; pero

para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y altura) para que su precio sea el menor posible.

Si suponemos que el precio del material para la tapa y los laterales es de una unidad por cm2, el precio para 1 cm2 de la base será de 1,5 unidades.

8) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Supón que un lado del rectángulo está en la base del triángulo.