Extremwertaufgaben

Optimieren ist eine „fundamentale Idee“ der Mathematik (BRUNER) und daher eine Leitlinie des Mathematikunterrichts.

Der Problemtyp „Extremwertaufgabe“ in der Differentialrechnung ist nur eine Realisierung dieser fundamentalen Idee.

Schema zum Lösen von Extremwertaufgaben:

- Versuche das Problem intuitiv zu verstehen!
- Lege Variable fest, die das zu variierende Objekt eindeutig charakterisieren!

- Drücke die zu optimierende Größe mit Hilfe der Variablen aus! („Hauptbedingung“)
- Formuliere eventuell vorhandene Zusammenhänge zwischen den Variablen! („Nebenbedingungen“)
- Stelle die zu optimierende Größe als Funktion einer Variablen dar! Definitionsmenge!

- Suche die globalen Extremstellen dieser Funktion!

  Bilde die erste Ableitung!
  Ermittle ihre Nullstellen!
  Untersuche, ob globale Extremstellen vorliegen!

- Ermittle die zugehörigen Werte der anderen Variablen und beantworte die gestellten Fragen!

Beispiel 1:

Welches Rechteck mit dem Umfang U = 100 cm besitzt den größten Flächeninhalt?

Intuitives Verstehen des Problems ….

Variable: x, y Längen der Seiten des Rechtecks

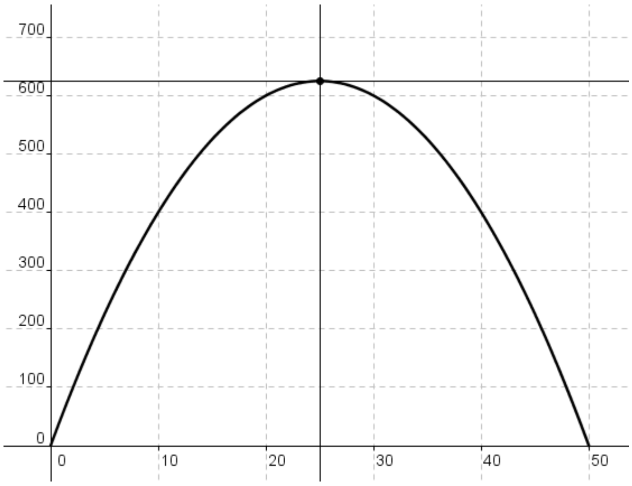
Zu optimierende Größe: $A = x.y$
Nebenbedingung: $2(x + y) = 100$

Funktion: $A(x) = x.(50 - x)$ für $x \in [0, 50]$

Maximum-Suche: $A'(x) = 50 - 2x \qquad A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 25$

$A(0) = A(50) = 0$
$A(25) = 625 \qquad \Rightarrow$ 25 ist globale Maximumstelle

Ergebnis: Der Flächeninhalt ist maximal für $x = y = 25\ cm$
Dieses Rechteck ist ein Quadrat.



Alternative Lösungsmethoden:

1. Das globale Maximum einer quadratischen Funktion kann elementar durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat gefunden werden:

$$A(x) = -x^2 + 50x = -(x^2 - 50x) = -(x-25)^2 + 625 = 625 - (x-25)^2$$

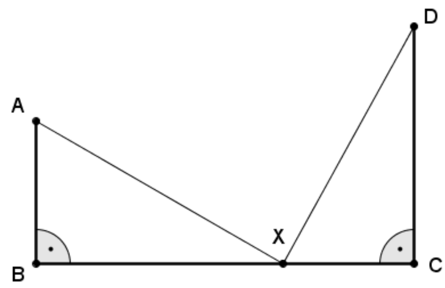
Der Wert dieses Ausdrucks ist stets ≤ 625; Gleichheit gilt nur für $x = 25$

2. Wenn man schon ahnt (weiß), dass das Quadrat die Lösung sein wird, kann man so argumentieren:

	Länge	Breite	Fläche
Quadrat	25	25	625
Konkurrent	$25 + \varepsilon$	$25 - \varepsilon$	$625 - \varepsilon^2$

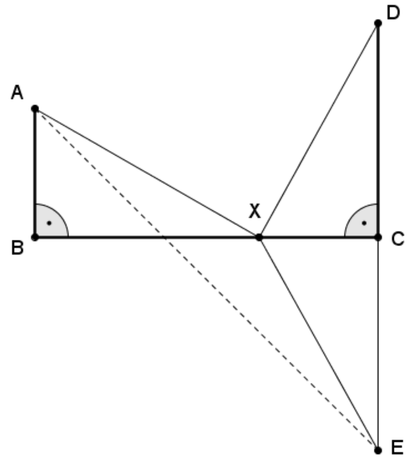
Für jedes $\varepsilon \neq 0$ gilt: $625 - \varepsilon^2 < 625$. Deshalb ist die Quadratfläche größer als jede von ihm verschiedene Rechtecksfläche.

Beispiel 2:



In der nebenstehenden Figur sind die Längen AB, BC und CD gegeben. Wie ist die Lage des Punktes X auf der Strecke BC zu wählen, damit die Länge des Streckenzuges AXD minimal ist?

Konkrete Zahlen: AB = 4 BC = 5 CD = 6



Eine Lösung der Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung ist anhand folgender Konstruktion direkt ersichtlich. Gleichzeitig erschließt sich hier die Gleichheit der Winkel $\angle AXB$ und $\angle DXC$ im optimalen Fall.

In dieser Aufgabe wird das Reflexionsgesetz der Optik als „Optimalitätsgesetz“ gewonnen.

Das FERMAT´sche Prinzip der Optik besagt:
„Das Licht wählt zwischen zwei Punkten den Weg mit der kürzesten Laufzeit.“

Da die Geschwindigkeit konstant ist, ist die Laufzeit minimal, wenn die durchlaufene Streckenlänge minimal ist.

Beispiel 3:

a. Welches quadratische Prisma mit gegebenem Volumen ($V = 1$) besitzt die kleinste Oberfläche?

Alternative Formulierung:

Zeige, dass gilt:
Von allen quadratischen Prismen mit gegebenem Volumen hat der Würfel die kleinste Oberfläche!

b. Welcher Quader mit gegebenem Volumen ($V = 1$) besitzt die kleinste Oberfläche?

Beispiel 4:

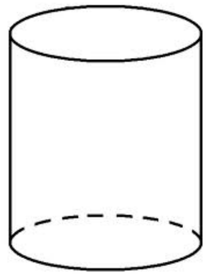
Gegeben sind drei Punkte A, B, C.
Gesucht ist jener Punkt X der Ebene, für den die Gesamtlänge $AX + BX + CX$ minimal ist.

Beispiel 5: (Thematisierung der Modellbildung)

Eine annähernd zylindrische Konservendose mit dem Inhalt 1000 cm³ soll mit möglichst geringem Materialaufwand produziert werden. Wie muss man die Abmessungen wählen?

Modell 1:

Wir nehmen an, dass die Dose exakt ein Zylinder ist und der Materialverbrauch der Oberfläche des Zylinders entspricht.



Lösung:

Zu optimierende Größe: $O = 2.r^2\pi + 2r\pi h$

Nebenbedingung: $r^2\pi\ h = 1000$

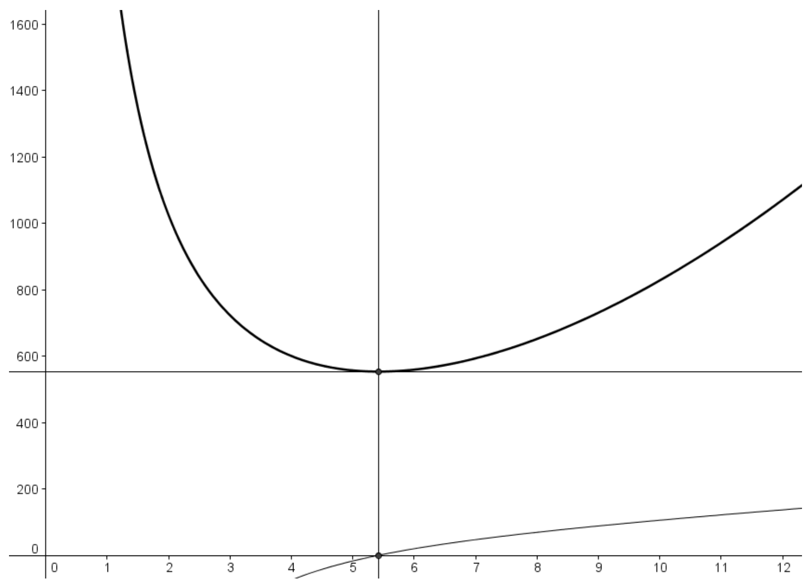
Funktion: $O(r) = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}$ $\quad r \in\ ]\,0, \infty\,[$

Minimum-Suche: $O'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2}$

$$O'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2000}{2\pi}} \quad \approx 5.42$$

$$O''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

Da $O''(r) > 0$ für alle $r \in R^+$, ist die gefundene Stelle die globale Minimumstelle.

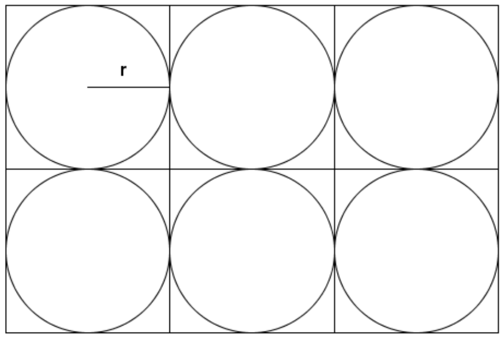


Zum gefundenen Radius r ergibt sich:
$h = 2r \quad \approx 10{,}84 \quad cm$

Die minimale Oberfläche beträgt:
$O_{\min} \approx 553{,}6\ \ cm^2$

Modell 2:

In Wirklichkeit ist der Materialverbrauch größer als die Oberfläche. Bei der Produktion müssen Rechtecke und Kreisscheiben aus Blech geschnitten werden. Die Kreisscheiben könnten z.B. so angeordnet werden:



Der tatsächliche Materialverbrauch in Abhängigkeit von r beträgt jetzt:

$$M(r) = 8.r^2 + \frac{2000}{r}$$

Eine analoge Rechnung wie oben liefert:

Der minimale Materialverbrauch ergibt sich für $r = 5\ cm$ und $h \approx 12{,}73\ cm$

Die Kreisscheiben könnten auch anders angeordnet werden. Der Abfall ist minimal, wenn die Kreise in regelmäßigen Sechsecken eingeschrieben sind („dichteste Kreispackung“). Das führt zu einer neuen Modellierung …..

Modell 3:

Eine genauere Untersuchung der Dose ergibt, dass Deckel und Boden mit der Mantelfläche durch Falzung verbunden sind. Deswegen benötigt man Überstände bei Radius und Höhe; wir nehmen jeweils 5 mm für jeden Falz.

Materialverbrauch: $M = 2.(r+0{,}5)^2\pi + 2.r\pi.(h+1)$

Nebenbedingung: $r^2\pi\ h = 1000$

Funktion: $M(r) = 2r^2\pi + 4r\pi + \dfrac{2000}{r} + 0.5\pi \qquad r \in \,]\,0, \infty\,[$

$$M'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 + r^2 - \frac{2000}{4\pi} = 0$$

Diese Gleichung kann numerisch oder mit Hilfe eines CAS gelöst werden. Alternativ kann der Graph der Funktion oder eine Tabelle untersucht werden….

Ergebnis: $r \approx 5{,}11 \qquad h \approx 12{,}21$

Natürlich kann Modell 3 wieder verfeinert werden, z.B. dadurch, dass wie in Modell 2 darüber nachgedacht wird, wie die Kreise aus dem Blech geschnitten werden….

Anmerkungen:

- Wie der Materialverbrauch in der Praxis tatsächlich zustande kommt, müsste genau recherchiert werden; er hängt ja von den tatsächlichen Produktionsbedingungen ab.

- Ob der Herstellerfirma wirklich die Optimierung des Materialverbrauchs wichtig ist, darf bezweifelt werden. Vermutlich sind andere Kriterien (Design, Stapelbarkeit, ….) von Bedeutung.

- Da der Funktionsgraph in der Nähe der Minimumstelle sehr flach verläuft, kann man vom optimalen Radius einigermaßen weit abweichen, ohne den Materialaufwand stark zu erhöhen.

Aufgabe:

Die Herstellerfirma akzeptiert, dass der Materialaufwand um bis zu 1% über dem minimalen Wert liegt. In welchem Bereich kann man dann den Radius der Dose wählen?

Lösung unter Verwendung von Modell 1:

$O_{\min} . 1{,}01 \quad \approx \quad 559{,}1$

- Lösung der Gleichung $O(r) = 559{,}1$ (TInspire) liefert zwei positive Lösungen (und eine negative): $r_1 \approx 4{,}90 \qquad r_2 \approx 5{,}98$

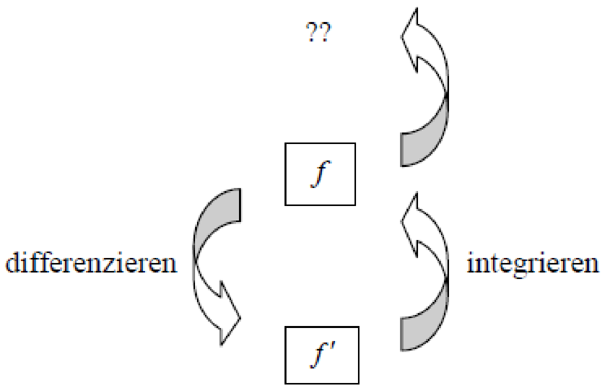
Man sieht: Der Radius darf um ca. 10% vom optimalen abweichen!
(Insbesondere liegen alle mit den anderen Modellen erzielten Werte im akzeptablen Intervall!)

Untersuchung mit einer Tabelle:

	A	B	C	D
1				
2		Radius	Oberfläche	
3				
4		4.5	571.68	
5		4.6	567.73	
6		4.7	564.33	
7		4.8	561.43	
8		4.9	559.02	
9		5	557.08	
10		5.1	555.58	
11		5.2	554.51	
12		5.3	553.85	
13		5.4	553.59	
14		5.5	553.7	
15		5.6	554.18	
16		5.7	555.02	
17		5.8	556.19	
18		5.9	557.7	
19		6	559.53	
20		6.1	561.67	
21				

Grundvorstellungen zum Integralbegriff

1. Integrieren heißt Rekonstruieren (einer Funktion aus ihrer Ableitung)



a. Algebraisch:

Es geht dabei um das <u>Operieren mit Funktionstermen</u>!
Aus den bekannten Ableitungsregeln ergeben sich (durch Umkehrung der Betrachtungsweise) Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“).

Häufig werden in diesem Zusammenhang die Begriffe *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* verwendet.

Definition:

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion
Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfunktion</u> von f $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$

Satz:

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f
Dann gilt:

$G: I \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f $\Leftrightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$

Bemerkungen:

Die Richtung " $\Leftarrow$ " ist einfach zu begründen: Die Ableitung der konstanten Funktion ist 0.
Die für die Verwendung des Satzes eigentlich wichtige Richtung " $\Rightarrow$ " ist schwieriger zu begründen und setzt voraus, dass f auf einem Intervall definiert ist!

Manchmal wird anstelle des Wortes Stammfunktion der Begriff „unbestimmtes Integral“ verwendet. Die dabei einzuführende Schreibweise ist allerdings kaum zu motivieren, wenn man an den algebraischen Vorgang des Umkehrens des Differenzierens denkt.

Ist F eine Stammfunktion von f, so schreibt man auch:

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

Typische Aufgabenstellung:

Die Momentangeschwindigkeit eines Körpers im freien Fall (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) ist gegeben durch

$$v(t) = g \cdot t$$

$(\ t\ in\ s, v\ in\ m/s,\quad g \approx 10\ m/s^2)$

Welchen Weg legt der Körper in den ersten 5 Sekunden seines Falles zurück?

Lösung:

Sei $s(t)$ die im Zeitintervall $[0, t]$ zurückgelegte Wegstrecke („Zeit-Ort-Funktion“)
Aus der Differentialrechnung ist bekannt, dass gilt:

$$v(t) = s'(t)$$

Gesucht ist also eine Funktion s mit der Eigenschaft

$$s'(t) = g \cdot t$$

Alle Funktionen mit dieser Eigenschaft sind von der Form

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + c$$

Wegen $s(0) = 0$ gilt $c = 0$ und damit

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Speziell erhält man: $s(5) \approx 125\ m$

Analog zeigt man:

Wenn ein Körper ausgehend vom Ruhezustand eine konstante Beschleunigung a erfährt, dann gilt für seine Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t die Formel

$$v(t) = a \cdot t$$

b. inhaltlich

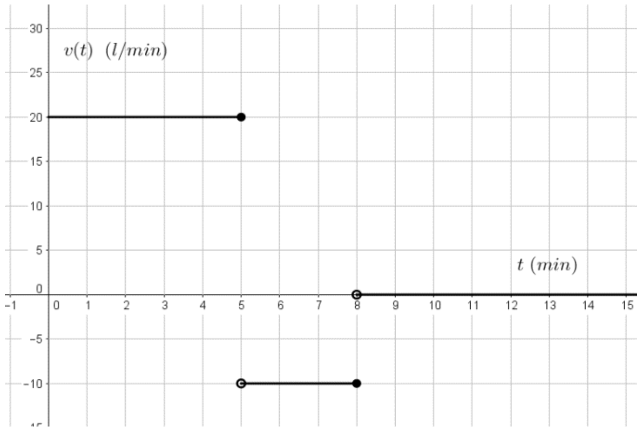
Der Integralbegriff wird intuitiv erworben und mit dem Konzept des orientierten Flächeninhalts verbunden. (Begriff wie Ober- und Untersummen treten dabei nicht auf, auch auf die später verwendete Integralschreibweise kann verzichtet werden.)
Es kann bewiesen werden, dass – unter geeigneten Voraussetzungen – Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden können.

Beispiel für Vorgangsweise:

Jemand lässt Wasser in eine Badewanne (Zuflussgeschwindigkeit: $20\ l/min$). Nach 5 Minuten merkt er, dass bereits zu viel Wasser in der Wanne ist. Er dreht den Wasserhahn ab und öffnet den Abfluss (Abflussgeschwindigkeit: $10\ l/\text{min}$). Nach 3 Minuten schließt er den Abfluss.

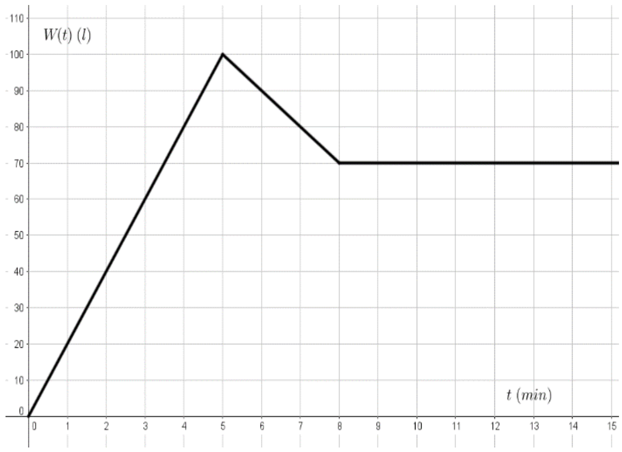
Wir betrachten, wie sich die Wassermenge im Lauf der Zeit entwickelt.

Das folgende Diagramm zeigt die Zuflussgeschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t



Sei $W(t)$ die Wassermenge in der Wanne nach t Minuten.

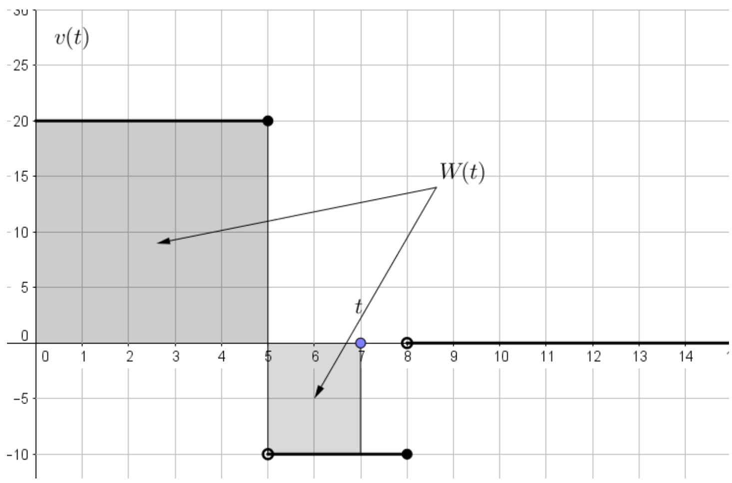
- Der Verlauf des Graphen kann zunächst intuitiv und dann exakt gezeichnet werden:



- Die Funktion ist stückweise linear und kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$W(t) = \begin{cases} 20 \cdot t & 0 \leq t \leq 5 \\ 100 - 10 \cdot (t-5) & 5 < t \leq 8 \\ 70 & t > 8 \end{cases}$$

- Die Funktionswerte können als orientierter Flächeninhalt gedeutet werden:
  Flächeninhalte unterhalb der x-Achse werden mit negativem Vorzeichen versehen



Definition

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
Die zu f gehörige Integralfunktion I_a ordnet jedem $x \in [a, b]$ den orientierten Inhalt der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse im Intervall $[a, x]$ zu.

Im späteren Verlauf (!) des Lehrgangs kann dafür geschrieben werden:

$$I_a(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

Bemerkungen:

- Integralfunktionen sind nicht immer Stammfunktionen! Falls f stetig ist, ist dies gemäß dem Hauptsatz aber der Fall.
  Im obigen Beispiel ist W keine Stammfunktion von v! (W ist nämlich an einigen Stellen nicht differenzierbar.)

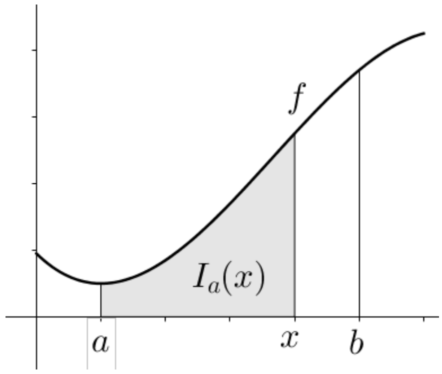
- Integralfunktionen sind hier definiert über den Begriff des (orientierten) Flächeninhalts.
  Wie dieser formelmäßig zu berechnen ist, ist ein anderes Thema….

Im Kontext von Flächenberechnungen werden Integralfunktionen häufig als Inhaltsfunktionen bezeichnet.

Untersuchung von Inhaltsfunktionen:

$I_a : [a,b] \to \mathbb{R}$

mit $I_a(x)$ = (orientierter) Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse im Intervall $[a,x] =: A(a,x)$



Einfache Beispiele:

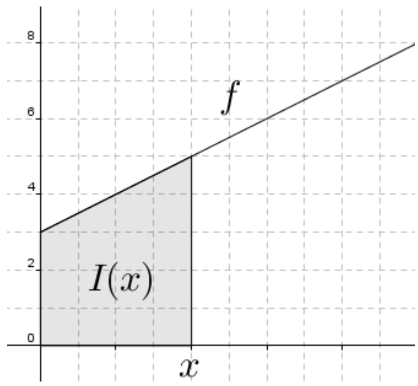
(1) $f(x) = 3$ (konstante Funktion)

$I_0(x) = 3 \cdot x$

$I_1(x) = 3 \cdot (x-1) = 3x - 3$

(2) $f(x) = 0{,}5x + 3$

$I_0(x) = \dfrac{3 + f(x)}{2} \cdot x = 0{,}25x^2 + 3x$



Aus diesen einfachen Beispielen kann man vermuten, dass allgemein gilt:

$$I_a{}'(x) = f(x)$$

Mit anderen Worten: Jede Inhaltsfunktion I_a ist eine Stammfunktion von f, (und zwar jene eindeutig bestimmte Stammfunktion F, für die gilt: $F(a) = 0$)

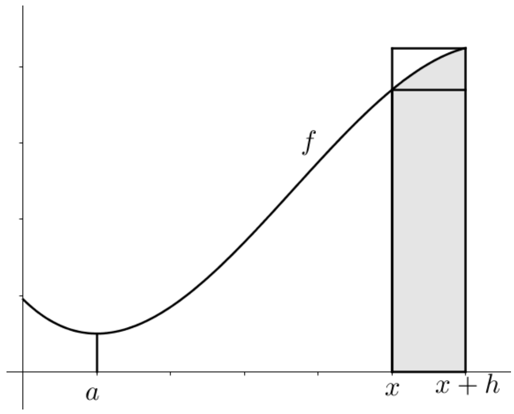
Bemerkung:

Natürlich stimmt dieser Satz nicht in voller Allgemeingültigkeit!
Nicht jede Funktion ist integrierbar, d.h. nicht immer existiert tatsächlich eine Inhaltsfunktion.
Wenn eine Inhaltsfunktion existiert, braucht diese nicht differenzierbar zu sein, sodass sie also insbesondere keine Stammfunktion ist.
Wenn allerdings f stetig ist, dann existiert die Inhaltsfunktion und ist eine Stammfunktion von f.
(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Beweis (auf Schulniveau)

Wir untersuchen die Änderung von $I_a(x)$, wenn x sich ändert ……
Zur Vereinfachung der Argumentation setzen wir voraus: f ist monoton wachsend.

Sei $h > 0$



Der „Flächenstreifen“ zwischen Graph und x-Achse im Intervall $[x, x+h]$ kann nach unten und nach oben abgeschätzt werden durch Rechtecksflächen:

$$f(x) \cdot h \quad \leq \quad I_a(x+h) - I_a(x) \quad \leq \quad f(x+h) \cdot h$$

Division durch h ergibt:

$$f(x) \quad \leq \quad \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \quad \leq \quad f(x+h)$$

Grenzwert-Betrachtung $h \to 0$ liefert:

$$f(x) \quad \leq \quad \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \quad \leq \quad f(x)$$

Also gilt:

$$I_a{}'(x) = f(x)$$

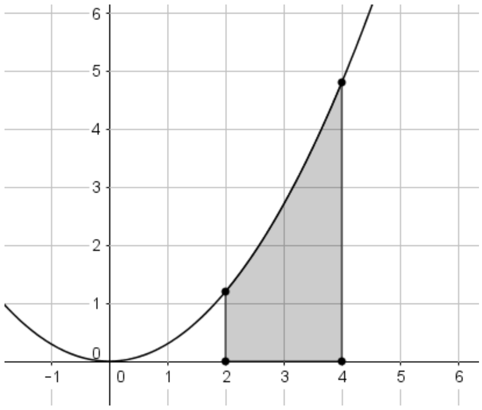
Bemerkungen zum Beweis:

- Stillschweigend wurde verwendet: $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$
  Dies bedeutet, dass f an der Stelle x stetig ist.
- Der Beweis wurde nur für $h > 0$ durchgeführt; für $h < 0$ verläuft die Argumentation analog.
- Für monoton fallende Funktionen müssen die Relationszeichen geändert werden, alle anderen Überlegungen bleiben unverändert.
- Für nicht monotone Funktionen ist die Argumentation etwas schwieriger; die Höhen der Rechtecke in der Abschätzung sind Funktionswerte irgendwelcher Stellen aus dem Intervall $[x, x+h]$

Mithilfe dieses Satzes lassen sich Flächen zwischen Graphen und x-Achse berechnen, ohne dabei die Integral-Schreibweise zu verwenden.

Beispiel:

Berechne den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graph der Funktion $f\colon\ x \to f(x) = 0{,}3x^2$ im Intervall $[2, 4\,]$!



Lösung:

Wir suchen einen Funktionsterm für die Funktion $I_2\colon\ x \to I_2(x) = A(2, x)$

Dann gilt: $A(2{,}4) = I_2(4)$

I_2 ist eine Stammfunktion von f, also gilt: $I_2(x) = 0{,}1x^3 + c$
Aus $I_2(2) = 0$ folgt: $c = -0{,}8$
Damit erhält man:

$$A(2{,}4) = I_2(4) = 5{,}6$$

Alternativ könnte man irgendeine Inhaltsfunktion, etwa I_0, bestimmen und den gesuchten Flächeninhalt als Differenz berechnen:

$$A(2{,}4) = I_0(4) - I_0(2)$$

2. Integrieren heißt Kumulieren (Betrachten des Gesamteffekts)

Das wichtige Ziel, Integrale als Grenzwert von bestimmten Summen aufzufassen und die übliche Integralschreibweise heuristisch zu deuten, erschließt sich am besten über das Problem, Flächeninhalte bzw. Wege näherungsweise zu berechnen. Dabei stehen nicht die numerischen Rechnungen im Zentrum, sondern die Idee und die Schreibweise

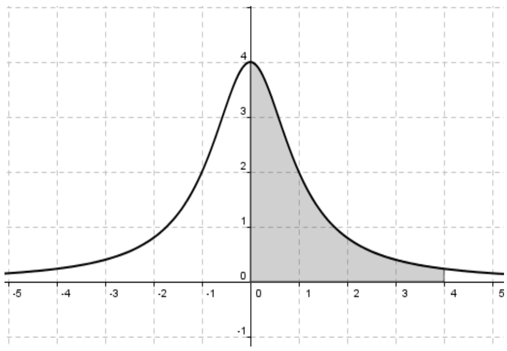
a. Berechnung von Flächeninhalten:

Aufgabe:

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$$

im Intervall $[0, 4]$



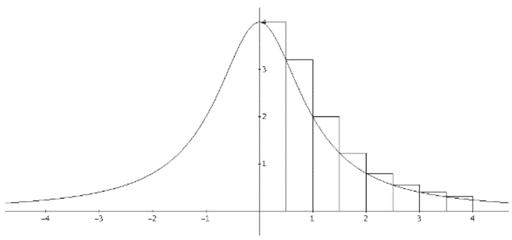
Problem: Es ist keine Stammfunktion von f bekannt!

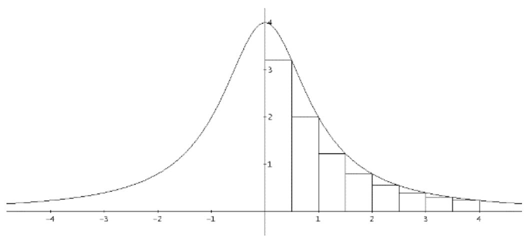
Idee zur näherungsweisen Berechnung des Flächeninhalts:

- Zerlegung des Flächenstücks in n Streifen gleicher Breite $\Delta x := \frac{4}{n}$

  Es ergeben sich Zerlegungspunkte $x_0 = 0; \quad x_i = x_0 + i.\Delta x$

- Berechnung von Ober- und Untersummen





Obersumme: (hier!)

$$O_n \quad := \quad f(x_0).\Delta x + f(x_1).\Delta x + \ldots\ldots + f(x_{n-1}).\Delta x \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x$$

Untersumme: (hier!)

$$U_n \quad := \quad f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \ldots\ldots + f(x_n).\Delta x \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

Es gilt: (mit $n = 2^k$)

(1) Die Folge $\langle O_n \rangle$ ist monoton fallend

(2) Die Folge $\langle U_n \rangle$ ist monoton wachsend

(3) Die Differenz $0_n - U_n$ strebt gegen 0

Die Folge der Obersummen und die Folge der Untersummen besitzen daher einen *gemeinsamen Grenzwert*. Diesen nennt man "bestimmtes Integral".

Definition:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n =: \int_a^b f(x)\,dx$$

Erläuterung der Schreibweise (LEIBNIZ):

$$\begin{array}{c} \sum f(x_i).\Delta x \\ \Big\downarrow \quad \Delta x \to 0 \\ \int f(x).dx \end{array}$$

Bemerkungen zu Ober- und Untersummen:

- Ober- und Untersummen sind einfach zu definieren, wenn die betrachtete Funktion monoton ist (wie im obigen Beispiel); dann sind die Funktionswerte jeweils am Anfang oder am Ende des Intervalls zu nehmen. Zur Motivierung der Schreibweise ist dies völlig ausreichend.

  Im allgemeinen Fall muss die Definition anders formuliert werden:

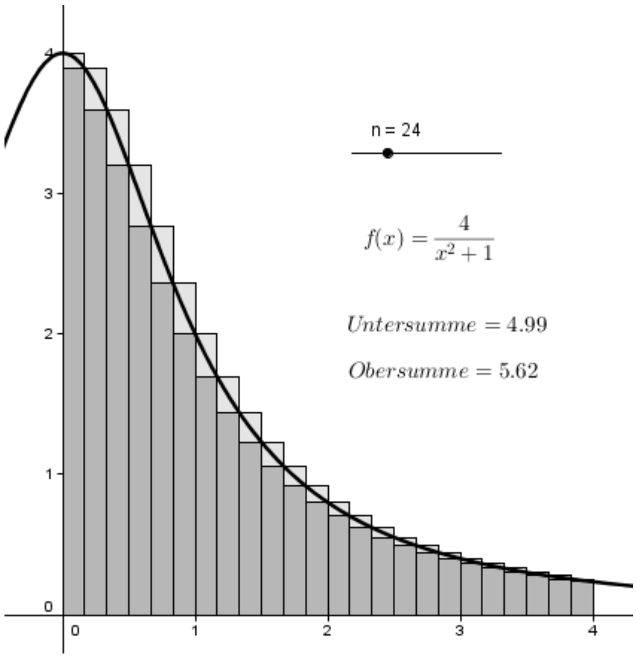
  Sei m_i der kleinste und M_i der größte Funktionswert im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$U_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \Delta x \qquad O_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta x$$

- Die Folge der Obersummen braucht nicht monoton fallend zu sein, die Folge der Untersummen braucht nicht monoton wachsend zu sein, wie man sich an Beispielen klarmachen kann.
  Sicher ist aber, dass sie monotone Teilfolgen besitzen, etwa mit $n = 2^k$

Die hier vermittelte Grundidee kann sehr gut mit GeoGebra dynamisch veranschaulicht werden.

Die Zahl n (= Anzahl der Teilintervalle) lässt sich über einen Schieberegler verändern, die Ober-und Untersummen stehen über einen eigenen Befehl zur Verfügung und werden sowohl berechnet als auch graphisch dargestellt.



b. Berechnung von Weglängen

Aufgabe: Die Momentangeschwindigkeit eines Körpers ist gegeben durch die Funktion

$$v(t) = \frac{4}{t^2+1}$$

(Einheiten: s bzw. m/s)

Berechne den im Zeitintervall $[0, 4]$ zurückgelegten Weg!

Problem: Es ist keine Stammfunktion von v bekannt!

Idee zur näherungsweisen Berechnung des Weges:

- Zerlegung des Zeitintervalls [0, 4] in kurze Teilintervalle, etwa der Länge 1 (*s*)

- Abschätzung des Weges in den einzelnen Teilintervallen:
  Für <u>konstante</u> Geschwindigkeit gilt: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit

  Die Geschwindigkeit nimmt im Intervall [0, 4] monoton ab;
  1. Sekunde: $v(1).1 \leq s(0,1) \leq v(0).1$
  2. Sekunde: $v(2).1 \leq s(1,2) \leq v(1).1$
  3. Sekunde: $v(3).1 \leq s(2,3) \leq v(2).1$
  4. Sekunde: $v(4).1 \leq s(3,4) \leq v(3).1$

- Summation:

$$\underbrace{v(1).1+v(2).1+v(3).1+v(4).1}_{\text{„Untersumme“}} \le s(0,4) \le \underbrace{v(0).1+v(1).1+v(2).1+v(3).1}_{\text{„Obersumme“}}$$

- Um eine genauere Abschätzung zu finden, muss das Intervall in eine größere Anzahl von Teilintervallen zerlegt werden:

  Intervalllänge: $\Delta t := \frac{4}{n}$ Zerlegungspunkte: $t_i := 0 + i.\Delta t \quad (i = 0, \ldots\ldots, n)$

  Analog zu oben ergibt sich die Abschätzung:

$$U_n := \sum_{i=1}^{n} v(t_i).\Delta t \quad \le \quad s(0,4) \quad \le \quad \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i).\Delta t \; := O_n$$

  Der Rest folgt jetzt wie bei a.

Wie können bestimmte Integrale berechnet werden?

Aufgrund der Deutung bestimmter Integrale als Flächeninhalt und der bereits bekannten Möglichkeit, diese Flächen mit Hilfe von Stammfunktionen zu berechnen, gilt der

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Falls F eine Stammfunktion von f ist, gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Falls keine Stammfunktion bekannt ist (wie im obigen Beispiel), kann das Integral <u>zumindest näherungsweise</u> mit Hilfe von Ober- bzw. Untersummen berechnet werden.

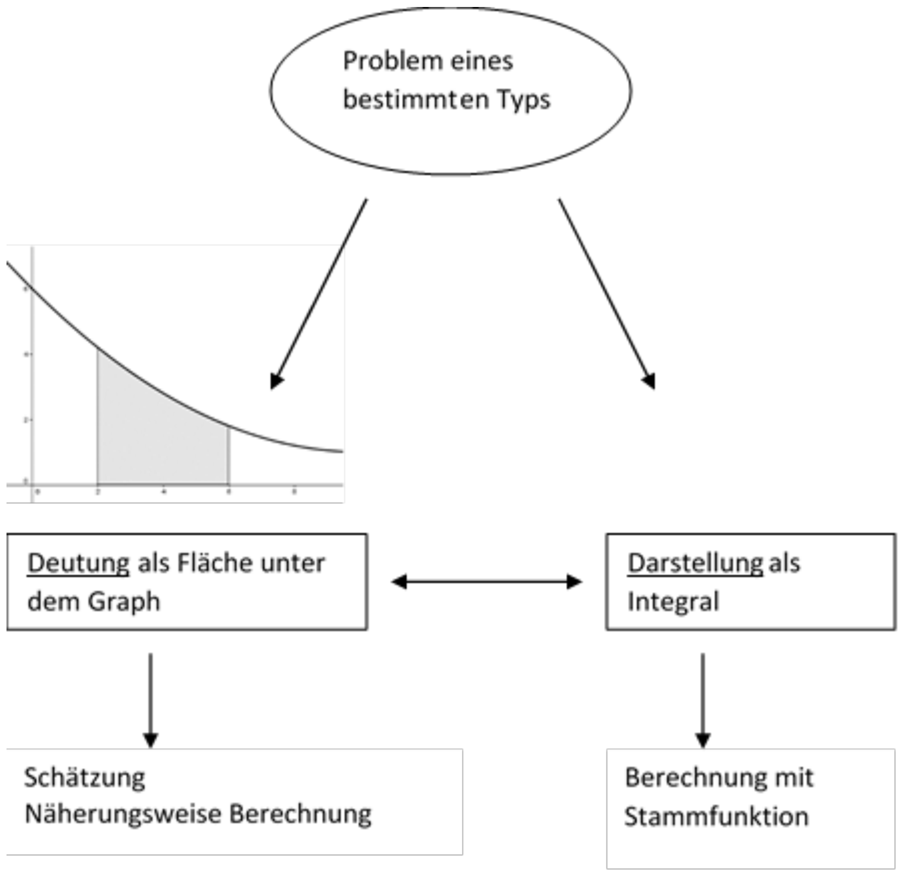
Für alle Anwendungen des Integrals (in der Geometrie, in der Physik, in der Stochastik, ….) ist die folgende Grundvorstellung zentral:

Grundvorstellung Integral:

Ein (bestimmtes) Integral ist der Grenzwert einer Summe von Produkten der Form $f(x) \cdot \Delta x$ für $\Delta x \to 0$

Wann immer dieses Konzept zur Berechnung einer Größe anwendbar ist, lässt sich diese als ein Integral darstellen und mit den entsprechenden Methoden der Integralrechnung berechnen.

Zudem lässt sich eine solche Größe immer als Fläche unter dem Graph einer Funktion deuten. Damit stehen dann Methoden zur elementargeometrischen Berechnung oder zur näherungsweisen Berechnung von Flächen zur Verfügung.



Beispiel:

Wenn ein Auto eine Vollbremsung macht, so ist die Beschleunigung während des Bremsvorgangs annähernd konstant. Für ein spezielles Auto gilt bei guten Straßenverhältnissen $a(t) = -10\ m/s^2$. Das Auto ist mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 40\ m/s$ unterwegs, als plötzlich ein Hindernis auf der Straße auftaucht und der Fahrer eine Vollbremsung macht.

a. Wie lang ist der Bremsweg des Autos?

b. $60\ m$ vor dem Auto befindet sich ein Hindernis auf der Straße. Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Auto gegen dieses Hindernis?

Lösungsvariante 1

$v(t)$ ist eine Stammfunktion von $a(t)$,
also: $v(t) = -10.t + c$

Wegen $v(0) = 40$ gilt: $c = 40$
also: $v(t) = -10.t + 40$

$v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4$

$s(t)$ ist eine Stammfunktion von $v(t)$,
also: $s(t) = -5.t^2 + 40.t + d$

Bremsweg = $s(4) - s(0) = 80\ m$

$s(t) = 60: \quad -5.t^2 + 40.t = 60$
$t = 6 \vee t = 2$
$t = 6$ ist sinnlos

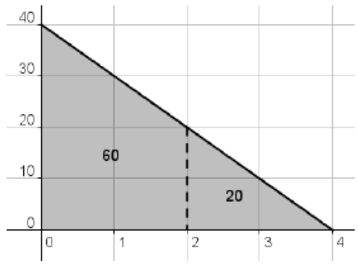
$v(2) = 20\ m/s$

Lösungsvariante 2

Die Momentangeschwindigkeit nimmt pro Sekunde um $10\ m/s$ ab; zu Beginn beträgt sie $40\ m/s$.
Also gilt: $v(t) = 40 - 10.t$

Nach 4 Sekunden ist die Geschwindigkeit auf 0 gesunken; das Auto steht.

Bremsweg = Flächeninhalt des Dreiecks
$= \frac{1}{2}.4.40 = 80\ m$



Zerlegung des Dreiecks zeigt, dass nach 2 Sekunden das Hindernis erreicht ist; die Geschwindigkeit ist dann 20 m/s

Integralbegriff in der Schulmathematik/ in der Fachmathematik

In der Schule baut man auf dem intuitiv vorhandenen Konzept des Flächeninhalts und seinen charakteristischen Eigenschaften auf.
Der Integralbegriff (als Grenzwert gewisser Produktsummen) ist dabei motiviert durch die (zumindest näherungsweise) Berechnung von Flächeninhalten.
Fragen wie: Was ist der Flächeninhalt eigentlich? Welche Punktmengen besitzen einen Flächeninhalt? werden dabei bewusst ausgeklammert.
Viele Eigenschaften des Integrals ergeben sich anschaulich aus den Eigenschaften des Flächeninhalts, z.B. (*)

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Die fachmathematische Analysis dreht sozusagen den Spieß um:

Der Begriff Integral wird ohne expliziten Bezug auf den Flächeninhalt definiert. Es muss daher über Existenzfragen nachgedacht werden, und Eigenschaften wie (*) müssen durch Rückgriff auf die Integraldefinition nachgewiesen werden.

Der Begriff „Flächeninhalt“ kann anschließend mit Hilfe des Integralbegriffs (oder analog zum Integralbegriff) präzisiert werden.

Berechnung von (bestimmten) Integralen

- Aufgrund des Hauptsatzes können bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden. Elementare Regeln zum Finden von Stammfunktionen erhält man durch „Umkehren“ der Ableitungsregeln.

  Alle in der Liste der Grundkompetenzen angeführten Funktionen können auf diese Weise integriert werden!

- Manche Ableitungsregeln (wie Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel in allgemeiner Form) lassen sich nicht in einfacher Weise „umkehren“ zu Integrationsregeln.
  Das Ermitteln von Stammfunktionen kann daher schon bei recht einfachen Funktionen ziemlich mühsam sein. Die so genannten Integrationsmethoden funktionieren eben nur manchmal oder ziemlich trickreich ….

- Falls es nicht gelingt, einen Funktionsterm für eine Stammfunktion anzugeben, oder falls gar kein Funktionsterm vorliegt, sondern nur eine Liste von Funktionswerten („empirische Funktion“), ist numerische Integration angebracht.

1. Stammfunktionen elementarer Funktionen

Analog zur Situation beim Differenzieren benötigt man einerseits Regeln zur Integration von „Grundfunktionen“, andererseits Regeln zur Integration von (aus diesen Grundfunktionen) „zusammengesetzten“ Funktionen:

Funktion	**(eine) Stammfunktion**
$f(x) = x^r \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$
$f(x) = x^{-1}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$

Seien f, g Funktionen, $a \in \mathbb{R}^*$
Sei F eine Stammfunktion von f, G eine Stammfunktion von g. Dann gilt:

Name der Regel	Funktion	(eine) Stammfunktion
Additionsregel	$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$H(x) = F(x) \pm G(x)$
Regel vom konstanten Faktor	$h(x) = a \cdot f(x)$	$H(x) = a \cdot F(x)$
Spezialfall Kettenregel	$h(x) = f(a \cdot x)$	$H(x) = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x)$

Diese Regeln werden oft so geschrieben:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx \;=\; \int f(x)\,dx \;\pm\; \int g(x)dx$$

$$\int a \cdot f(x)\,dx \;=\; a \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int f(a \cdot x)\,dx \;=\; \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x) \quad mit \quad F(x) = \int f(x)\,dx$$

2. Integrationsmethoden

Diese werden meist formuliert in der Schreibweise der unbestimmten Integrale.

Partielle Integration

Aus der Produktregel

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

erhält man durch Integration:

$$\int u' \cdot v \;=\; u \cdot v - \int u \cdot v'$$

Bei geeigneter Wahl der Funktionen u, v gelingt es, das links stehende Integral zu berechnen, weil das rechts stehende bereits berechnet werden kann oder zumindest einfacher zu berechnen ist.

Beispiel:

Zu berechnen ist:

$$\int x \cdot e^x\,dx$$

Setzt man: $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$, dann gilt: $u(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, und man erhält:

$$\int x \cdot e^x\,dx \;=\; x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx \;= x \cdot e^x - e^x \;=\; e^x \cdot (x-1)$$

Substitutionsmethode

Aus der Kettenregel

$$(u(v(x)))' = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

erhält man durch Integration

$$\int u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)\, dx \ = u(v(x))$$

In der Praxis wird bei der Substitutionsmethode (aus mnemotechnischen Gründen) gerne die LEIBNIZ´sche Schreibweise verwendet:

$$v'(x) = \frac{dv}{dx}$$

Damit ergibt sich:

$$\int v'(x) \cdot f\big(v(x)\big)dx = \int f(v)dv$$

Beispiel:

Zu berechnen ist

$$\int x \cdot \cos(x^2)\ dx$$

Setzt man: $v(x) = x^2$ und $f(v) = \cos\,(v)$

dann gilt: $dv = 2x \cdot dx$

und man erhält:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\ dx = \int \frac{1}{2} \cdot \cos(v)\ dv \ = \ \frac{1}{2} \cdot \sin(v) = \frac{1}{2} \cdot \sin\,(x^2)$$

In diesem Beispiel war die verwendete Substitution naheliegend. Das ist keineswegs immer so. Die Anwendung der Integrationsmethoden ist oft ziemlich trickreich und benötigt Erfahrung und Übung. Ob überhaupt eine der Methoden zum Ziel führt, ist im Allgemeinen nicht von vornherein klar.

Es gibt nämlich Funktionen, die zwar – weil sie stetig sind – eine Stammfunktion besitzen, bei denen diese Stammfunktion aber nicht mit „elementaren Funktionen“ darstellbar ist.

Ein Beispiel dafür ist die Dichtefunktion der Normalverteilung; deren Funktionsterm ist von der Form

$$f(x) = c \cdot e^{-k \cdot x^2}$$

3. Numerische Integration

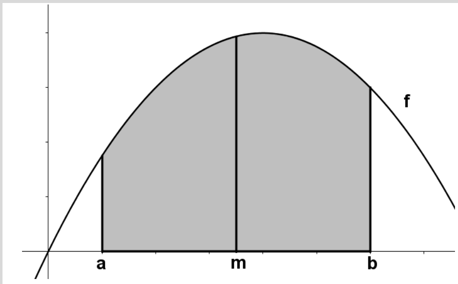
Berechnung von bestimmten Integralen zumindest näherungsweise ohne Verwendung einer Stammfunktion mit Hilfe einiger Funktionswerte und einer Quadraturformel.

Es gibt verschiedene Methoden der numerischen Integration. Die in der Praxis wichtigste ist die Methode von SIMPSON (Thomas, 1710-1761)

Ausgangspunkt: **die KEPLER´sche Fassregel**

Ist f eine quadratische Funktion, $[a, b]$ ein Intervall mit Mittelpunkt m, dann gilt:

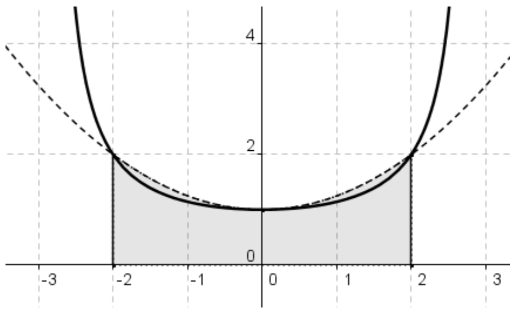
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b))$$



Integrale von quadratischen Funktionen können also ohne Verwendung von Stammfunktionen berechnet werden mit Hilfe von 3 Funktionswerten.

Falls f keine quadratische Funktion ist, kann die Formel als Näherungsformel verwendet werden:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b))$$



Um eine Verbesserung des Näherungswertes zu erzielen, kann man folgendermaßen vorgehen (Methode von SIMPSON):

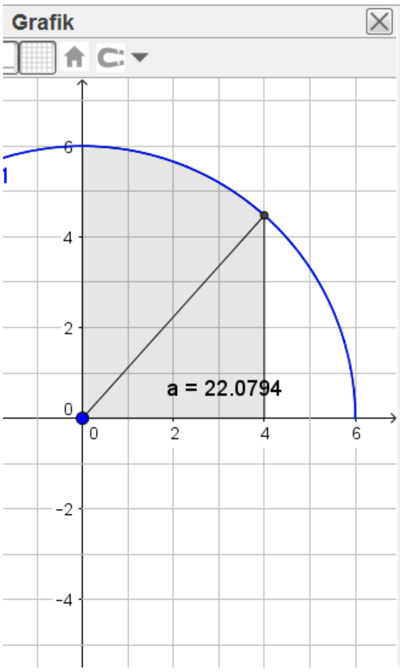
1. Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n gleich lange Teilintervalle
2. Anwendung der Kepler´schen Fassregel in jedem Teilintervall
3. Summation der Teilergebnisse

Beispiele:

1. Berechne das folgende Integral näherungsweise mit der Simpson-Methode ($n = 2; n = 4$)

$$\int_0^4 \sqrt{36 - x^2}\ dx$$

Vergleiche die Ergebnisse mit dem (elementargeometisch bestimmbaren!) wahren Wert!



Tabelle

	A	B	C	D	E
1	x	$\sqrt{36-x^2}$	Gewicht	Produkt	
2	0	6	1	6	
3	2	5.6569	4	22.6274	
4	4	4.4721	1	4.4721	
5			Summe:	33.0996	
6			Integral:	22.0664	
7					
8					
9	0	6	1	6	
10	1	5.9161	4	23.6643	
11	2	5.6569	2	11.3137	
12	3	5.1962	4	20.7846	
13	4	4.4721	1	4.4721	
14			Summe:	66.2348	
15			Integral:	22.0783	
16					

2. Während der Fahrt eines Autos wird alle 10 Sekunden die momentane Geschwindigkeit gemessen und protokolliert. Die Messwerte sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

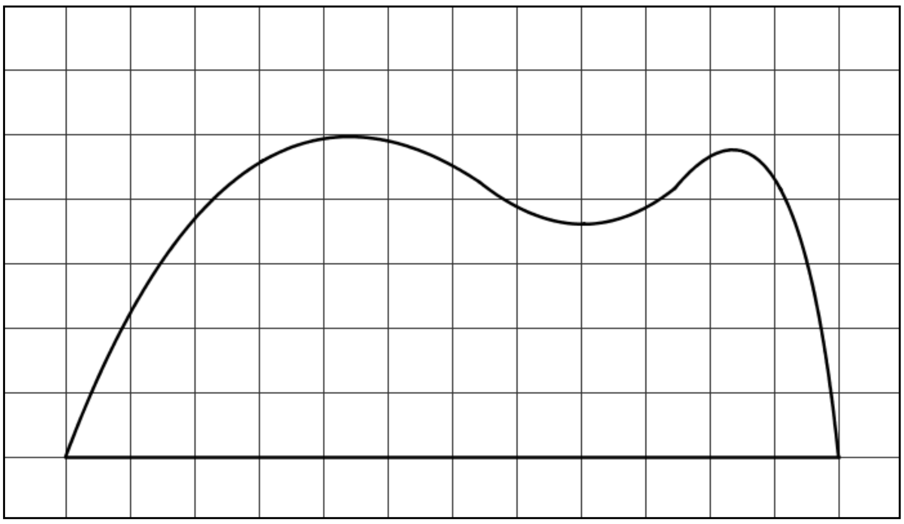
t (in s)	v (in m/s)
0	30
10	29
20	28
30	25
40	24
50	16
60	6

Fertige eine graphische Darstellung an!

Berechne den Weg, den das Auto in dieser einen Minute zurückgelegt hat!

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos!

3. Wie groß ist der Flächeninhalt des dargestellten Flächenstücks? (Einheit: 1 cm)



Anwendungen des Integrals

Anwendungen in der Geometrie:

- Berechnung von Flächeninhalten zwischen Graphen von Funktionen
- Berechnung des Volumens von Körpern, insbesondere von Rotationskörpern
- Berechnung der Länge von Kurvenstücken („Bogenlänge“)
- Berechnung der Mantelfläche von Rotationskörpern
- Berechnung des Schwerpunkts von Flächen

Anwendungen in der Physik

- Berechnung von Wegen (aus der Geschwindigkeit)
- Berechnung von Geschwindigkeiten (aus der Beschleunigung)
- Berechnung von Arbeit (aus der Kraft, aus der Leistung)
- ....

Anwendungen in der Stochastik

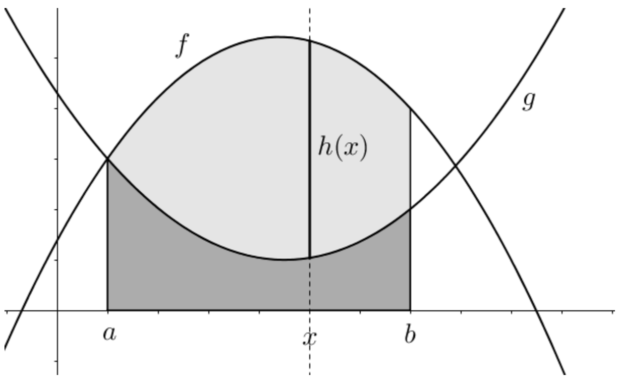
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (aus der Dichtefunktion)
- Berechnung von Erwartungswerten

Fläche zwischen Funktionsgraphen

Wenn $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \;=\; \int_a^b h(x)\,dx$$

ist der Flächeninhalt des von den Graphen der Funktionen f und g im Intervall $[a,b]$ begrenzten Flächenstücks.



Begründung:

Der Inhalt des beschriebenen Flächenstücks lässt sich berechnen als Differenz zweier Flächeninhalte, welche jeweils durch ein Integral dargestellt werden können.
Dazu wählt man eine Zahl $c \in \mathbb{R}^+$ so, dass für alle $x \in [a,b]$ gilt: $f(x) + c \geq 0 \;\wedge\; g(x) + c \geq 0$

Dann gilt:

$$A_1 = \int_a^b (f(x) + c)\, dx \qquad A_1 = \int_a^b (g(x) + c)\, dx$$

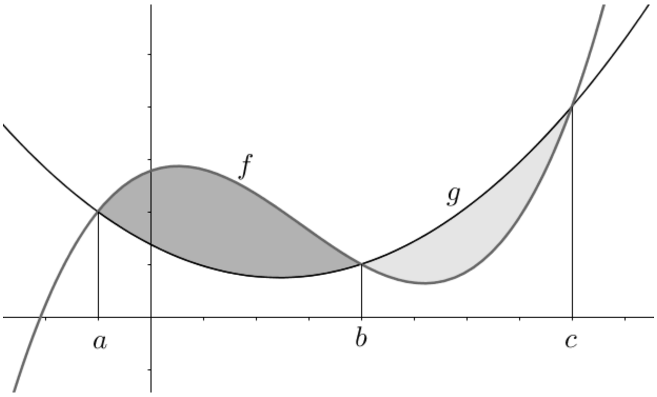
Der gesuchte Flächeninhalt ist ihre Differenz:
Wegen

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big) dx$$

ergibt sich die Behauptung.

Lässt man die Voraussetzung $f \geq g$ weg, so gibt dieses Integral den orientierten Flächeninhalt an.

Im folgenden Beispiel gilt daher:



$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx > 0$$

$$\int_b^c (f(x) - g(x))\ dx < 0$$

$$\int_a^c (f(x) - g(x))\ dx > 0$$

Volumen eines Körpers

Für das Volumen eines Prismas mit Grundfläche A und Höhe h gilt die Formel:

$$V = A \cdot h$$

Ein Prisma ist ein Körper mit der Eigenschaft, dass jede Querschnittsfläche (in einer Ebene parallel zur Grundfläche) kongruent (und damit auch flächengleich) zur Grundfläche ist.

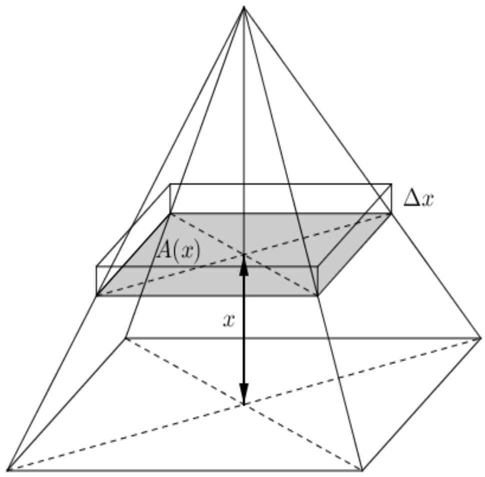
Allgemeiner lässt sich das Volumen eines Körpers mit Hilfe eines Integrals berechnen:

Sei h die Höhe des Körpers,
$A(x)$ die Querschnittsfläche in der Höhe x über der Grundfläche für $x \in [0, h]$
Dann gilt für sein Volumen

$$V = \int_0^h A(x)\, dx$$

Begründung:

- Wir zerschneiden den Körper parallel zur Grundfläche in „dünne Schichten" der Höhe Δx Dadurch entsteht eine Zerlegung des Intervalls $[0, h]$ mit Zerlegungspunkten
$$0 = x_0 < x_1 < \ldots . < x_n = h$$
- Jede dieser „Schichten" ist näherungsweise ein Prisma, sodass für jedes einzelne Volumen gilt:
$$V_i \approx A(x_i) \cdot \Delta x$$
- Für das Volumen des Körpers gilt daher:
$$V = \sum V_i \approx \sum A(x_i) \cdot \Delta x$$
wobei die Näherung umso besser ist, je kleiner Δx ist.
- Das exakte Volumen ist der Grenzwert dieser Summe für $\Delta x \to 0$:
$$V = \int_0^h A(x)dx$$

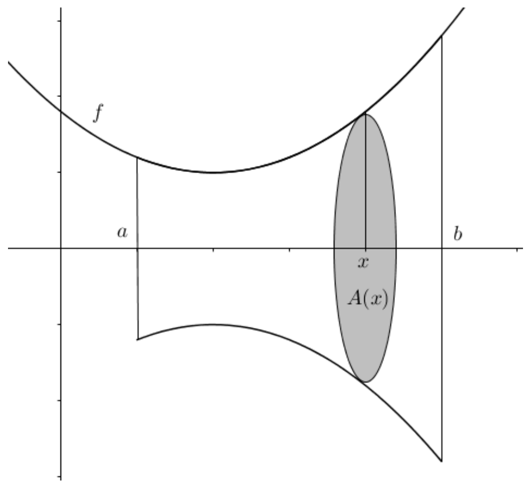


Spezialfall Rotationskörper

Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation eines Flächenstücks (oder eines Kurvenstücks) um eine Achse, im einfachsten Fall durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse im Intervall im Intervall $[a, b]$

$A(x)$ ist die Fläche eines Kreises mit Radius $f(x)$, also gilt:
$$A(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$$

Damit erhält man die Formel:
$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



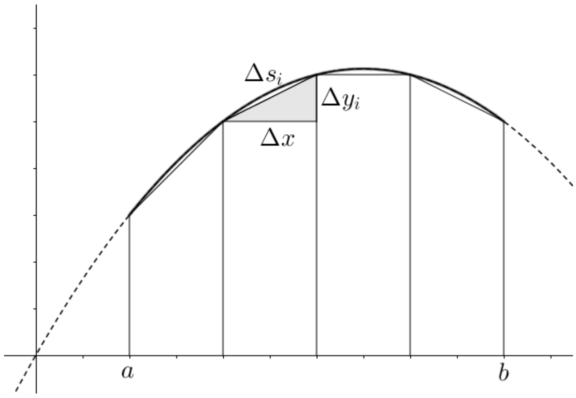
Bogenlänge

Der Graph einer (stetigen) Funktion f ist eine Kurve in der Ebene.

Sei $L(a,b)$ die Länge des Kurvenstücks zwischen den Punkten $P=(a,f(a))$ und $Q=(b,f(b))$
Dann gilt:

$$L(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\;dx$$

Begründung:



- Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in viele kurze Teilintervalle der Länge Δx. Dadurch ergeben sich Zerlegungspunkte $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

- Wir approximieren die Kurve durch einen Polygonzug, bestehend aus Strecken der Länge Δs_i

  In jedem der Teilintervalle gilt nach Pythagoras:

$$(\Delta s_i)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y_i)^2$$

  beziehungsweise

$$\Delta s_i=\Delta x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$$

- Summation über alle Teilstrecken ergibt:

$$L(a,b)\approx\sum\Delta s_i=\sum\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

  wobei die Approximation umso besser ist, je kleiner Δx ist.

- Der Grenzübergang $\Delta x\to 0$ liefert:

$$L(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\;dx$$

Diese Überlegung kann besonders elegant in der Leibniz´schen Schreibweise dargestellt werden:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

$$s=\int ds=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$$

Bemerkungen:

- Die bei der Berechnung der Bogenlänge auftretenden Integrale sind meist schwer zu berechnen. Hat man ein CAS zur Verfügung, ist das allerdings kein Problem.

- Der Begriff der Bogenlänge ist heikel:

  Die Approximation einer Kurve durch eine Folge von Kurven mit bekannter Länge führt nicht unbedingt zu einer Approximation der Bogenlänge, genauer:
  Konvergiert eine Folge von Kurven K_n (punktweise oder sogar gleichmäßig) gegen die Kurve K, so muss die Folge der Bogenlängen $L(K_n)$ keineswegs gegen $L(K)$ konvergieren!

Anwendungen in der Physik

Bei allen schulrelevanten Beispielen liegt dieselbe Situation vor:

Ausgangspunkt ist eine „Grundformel“ von der Form eines <u>Produkts</u>, die den Zusammenhang der interessierenden Größen darstellt,
allerdings nur, solange der eine Faktor nicht vom anderen abhängt.

In der Verallgemeinerung kommt man über den Weg einer <u>Produktsumme</u> zu einer <u>Integralformel</u>.

Berechnung des Weges aus der Geschwindigkeit

Es gilt die Grundformel:

$$s = v \cdot t$$

wenn die Geschwindigkeit konstant ist.

Im allgemeinen Fall liegt eine Geschwindigkeitsfunktion $t \to v(t)$ vor, die jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit zuordnet.

Zur Berechnung des Weges geht man so vor:

- Zerlegung des Zeitintervalls in „kleine“ Intervalle der Länge Δt
  In jedem dieser Intervalle ist v annähernd konstant, sodass für die in diesem Intervall zurückgelegt Wegstrecke Δs gilt:

  $$\Delta s_i \approx v_i \cdot \Delta t$$

  Damit ergibt sich für den insgesamt zurückgelegten Weg:

  $$s = \sum \Delta s_i \approx \sum v_i \cdot \Delta t$$

- Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert die Integralformel:

  $$s = \int v(t)\, dt$$

Berechnung der Arbeit aus der Kraft

Es gilt die Grundformel:

$$W = F \cdot s$$

wenn die Kraft konstant ist.

Im allgemeinen Fall liegt eine Kraftfunktion $s \to F(s)$ vor, die jedem Ort eine dort wirkende Kraft zuordnet.

Zur Berechnung der Arbeit geht man so vor:

- Zerlegung des Weges in „kleine“ Intervalle der Länge Δs
  In jedem dieser Intervalle ist F annähernd konstant, sodass für die in diesem Intervall verrichtete Arbeit ΔW gilt:
  $$\Delta W_i \approx F_i \cdot \Delta s$$
  Damit ergibt sich für die insgesamt verrichtete Arbeit:
  $$W = \sum \Delta W_i \approx \sum F_i \cdot \Delta s$$
- Grenzübergang $\Delta s \to 0$ liefert die Integralformel:
  $$W = \int F(s)\, ds$$

Berechnung der Arbeit aus der Leistung

Es gilt die Grundformel:

$$W = P \cdot t$$

wenn die Leistung konstant ist.

Im allgemeinen Fall liegt eine Leistungsfunktion $t \to P(t)$ vor, die jedem Zeitpunkt die erbrachte Leistung zuordnet.

Zur Berechnung der Arbeit geht man so vor:

- Zerlegung des Zeitintervalls in „kleine“ Intervalle der Länge Δt
  In jedem dieser Intervalle ist P annähernd konstant, sodass für die in diesem Intervall verrichtete Arbeit ΔW gilt:
  $$\Delta W_i \approx P_i \cdot \Delta t$$
  Damit ergibt sich für die insgesamt verrichtete Arbeit:
  $$W = \sum \Delta W_i \approx \sum P_i \cdot \Delta t$$
- Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert die Integralformel:
  $$W = \int P(t)\, dt$$

Einige Aufgaben zur Integralrechnung

1. Ein Auto ist mit einer Geschwindigkeit von etwa 70 km/h unterwegs. Wegen eines plötzlich auftauchenden Hindernisses macht der Fahrer eine Vollbremsung.
   Wie lang ist der Bremsweg?

Didaktische Hinweise:

- Aktivierung von *Alltagserfahrung* (Moped ….) bzw. von *Vorwissen* (Fahrschule)
- Formulierung einer *Modellannahme* notwendig!

Einfachste Modell-Annahme:

Beschleunigung ist konstant: $a(t) = -c$
(bzw. *Geschwindigkeit nimmt linear ab* $v(t) = v_0 - c \cdot t$

Welchen Wert sollte man für c verwenden?
c hängt ab von Straßenbeschaffenheit, Reifen, Eigenschaften des Fahrzeugs, ….

Einige Werte:	PKW auf trockenem Asphalt, gute Reifen:	$c \approx 8\ \ (m/s^2)$
	PKW auf Neuschnee, Winterreifen:	$c \approx 3\ \ (m/s^2)$
	PKW auf Glatteis, Winterreifen ohne Spikes:	$c \approx 1\ \ (m/s^2)$

Man muss sich jetzt für ein Szenario entscheiden …..
Die Angabe „das Auto fährt ist mit etwa 70 km/h unterwegs“ präzisieren wir willkürlich:
$v_0 = 20\ \ (m/s)$

Lösungsskizze:

$v(t) = 20 - 8.t$
$s(t) = 20t - 4t^2$ (gemessen ab dem Punkt, in dem Bremsung beginnt)
$v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2{,}5$

Bremsweg $b = s(2{,}5) - s(0) = 25\ m$

Auch eine allgemeine Rechnung (mit den Parametern c und v_0) ist nicht schwierig. Ergebnis:

$$b = \frac{{v_0}^2}{2c}$$

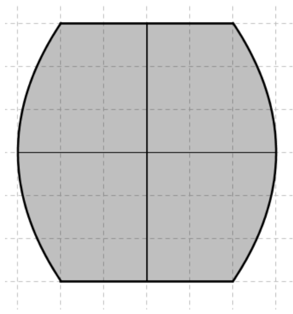
Interpretation dieses Ergebnisses:
Der Bremsweg ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Schüler erinnern sich manchmal an die Faustregel aus der Fahrschule: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$
Dabei ist aber die Geschwindigkeit in km/h gemessen!
Eine kurze Rechnung zeigt: Dies entspricht $c \approx 4$

2. Ein Fass hat folgende Abmessungen (innen):

Radius von Grund- und Deckfläche:	$r \; = \; 2\,dm$
Größter Radius (in halber Höhe):	$R \; = \; 3\,dm$
Höhe	$h \; = \; 6\,dm$

Wie groß ist das Volumen des Fasses?



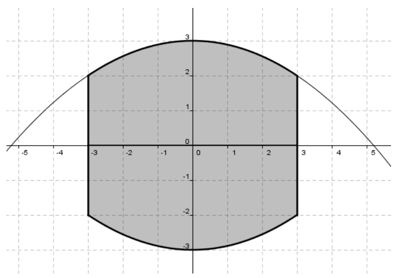
Lösungshinweise:

Zunächst ist eine grobe elementargeometrische Approximation möglich, z.B. mit Hilfe zweier Kegelstümpfe. Ergebnis: $V \approx 120 \;\; dm^3$

Für eine genauere Berechnung ist folgende Vorgangsweise typisch:

(1) Einführung eines geeigneten Koordinatensystems
(2) Auswahl eines Funktions- bzw. Kurventyps zur Beschreibung der Fassdauben
(3) Anpassen der Parameter an die gegebenen Abmessungen
(4) Berechnung des Volumens mit Hilfe eines Integrals

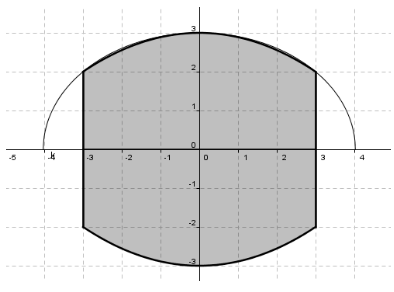
Beschreibung durch quadratische Funktion:



$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 3$$

$$V = 2\pi.\int_0^3 (-\frac{1}{9}x^2 + 3)^2\,dx \quad = \ldots\ldots \approx 135{,}7\; dm^3$$

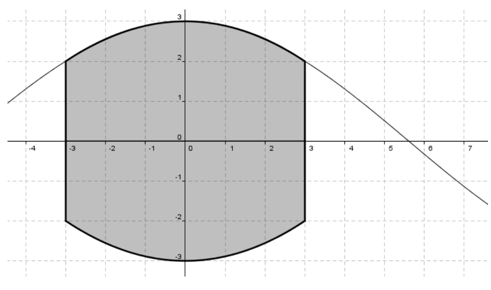
Beschreibung durch Ellipsenbogen:



$$y^2 = 9 - \frac{5}{9}x^2$$

$$V = 2\pi.\int_0^3 (9 - \frac{5}{9}.x^2)dx \quad = \ldots\ldots \approx 138{,}2\; dm^3$$

Beschreibung durch Cosinus-Funktion:



$$f(x) = 3.\cos(0{,}28.x)$$

$$V = 2\pi.\int_0^3 (3.\cos(0{,}28.x))^2\;\; dx \quad = \ldots\ldots \approx 135\; dm^3$$

Die Art der Fragestellung ist auch historisch bedeutsam:
Der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler widmet ihr ein ganzes Buch *(„Nova stereometria doliorum vinariorum“*, Linz 1615). Darin versucht Kepler, das Volumen verschiedener Fasstypen zu berechnen, indem er sie als Rotationskörper geeigneter Kegelschnittslinien auffasst, bei denen aber die Rotationsachse von Haupt- und Nebenachse verschieden ist. Bei einigen wenigen Körpern gelingt dies auch, allerdings mit Methoden, die sich sehr von unseren heutigen unterscheiden.

Nicht in diesem Buch angeführt, aber trotzdem mit seinem Namen verbunden ist die so genannte *Kepler´sche Fassregel:*

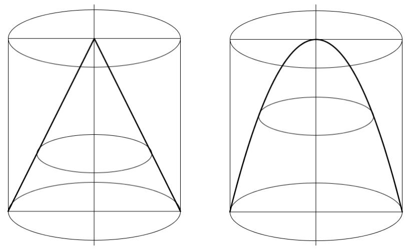
Sind G, M und D die Grundfläche, Mittelfläche und Deckfläche eines Fasses mit Höhe h, so gilt für sein Volumen die Formel:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6} \cdot \mathrm{h} \cdot \pi \cdot (\mathrm{G} + 4\mathrm{M} + \mathrm{D})$$

Diese Formel entspricht im obigen Beispiel genau der Approximation durch einen Ellipsenbogen.

3. Archimedes von Syracus (287 – 212 v. Chr.) fand das folgende bemerkenswerte Resultat:

Einem Zylinder (mit Radius r und Höhe h) wird ein Kegel und ein Paraboloid eingeschrieben. Dann gilt:
Das Volumen des Kegels ist ein Drittel, das Volumen des Paraboloids die Hälfte des Volumens des Zylinders.



Beweise beide Teile dieser Behauptung mit Hilfe der Integralrechnung

4. Die benötigte elektrische Leistung eines Gerätes, die sich mit der Zeit verändert, werde gegeben durch eine Funktion P.

   Wie kann daraus die im Zeitintervall $[0, T]$ verbrauchte <u>Energie</u> (=Arbeit) berechnet werden? Begründe ausführlich!
   Markiere diese Energie in der gegebenen Graphik!

   Wie kann die <u>mittlere Leistung</u> des Geräts im Zeitintervall $[0, T]$ berechnet werden?
   Zeichne diese mittlere Leistung ungefähr in der Graphik ein!