2019/20. 3. probléma

Adjuk meg a következő sorozat első *n* tagjának összegét!

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$$

Megoldás:

Legyen $d_n = a_{n+1} - a_n$, ekkor $d_1 = a_2 - a_1 = 2$. Így a $d_{n+1} = d_n + 1$, $d_1 = 2$ lineáris rekurzióhoz jutunk. Akár teljes indukcióval, akár az alábbi módszerrel beláthatjuk, hogy $d_n = n+1$:

$d_{n+1} = d_n + 1$;
$d_n = d_{n-1} + 1$;
.
.
.
$d_3 = d_2 + 1$;
$d_2 = d_1 + 1$

adjuk össze a fenti egyenlőségeket, ekkor azt kapjuk, hogy $d_{n+1} = d_1 + n = n + 2$, azaz $d_n = n+1$.

Így kapjuk, hogy az $a_{n+1} - a_n = n+1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. rekurzív sorozat általános tagját kell megadnunk. Alkalmazzuk most is az előző módszert:

$a_{n+1} - a_n = n+1$;
$a_n - a_{n-1} = n$;
.
.
.
$a_3 - a_2 = 3$;
$a_2 - a_1 = 2$

adjuk össze megint a fenti egyenlőségeket, így kapjuk, hogy $a_{n+1} - a_1 = 2 + 3 + \ldots + n + (n+1)$, azaz $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, tehát $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Így a az első n tag összeg:

$$S_n = \frac{1\cdot \overbrace{2}^{(1+1)} + 2\cdot \overbrace{3}^{(2+1)} + 3\cdot \overbrace{4}^{(3+1)} + \ldots + n(n+1)}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k}{2} =$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$