Funciones.

Funciones reales. Definición.

Las funciones matemáticas son una herramienta muy útil, en la mayoría de las disciplinas científicas, y en muchos aspectos de la vida cotidiana, ya que por ejemplo, el precio del recibo del teléfono o la factura de la luz, están calculado de acuerdo con alguna función matemática.

En las funciones matemáticas existen una serie de magnitudes relacionadas.

En particular, en este tema estudiaremos las funciones reales de variable real, que son aquellas, en las que hay dos magnitudes reales relacionadas.

Definición de función

Una **función real de variable real** es una correspondencia f entre dos conjuntos reales X e Y, tal que a cada elemento x de X le hace corresponder un solo elemento y de Y. Y que podemos expresar como f : $X \rightarrow Y$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Habitualmente, tomamos $X = Y = \mathbb{R}$, y a los elementos x se les denomina variable independiente y a los elementos y variable dependiente. La expresión algebraica $y = f(x)$ representa la relación entre dichas variables.

La mayoría las funciones las definimos solamente por su expresión algebraica $y = f(x)$.

 # Ejemplo.- La función $y = \frac{x}{2}$ *, representa que a cada número x le corresponde su mitad .*

Denominamos **dominio o campo de existencia de la función f**, al subconjunto de $\mathbb{R}$, para el cual está definida la función $f(x)$, es decir

$$Dom_f = \{x \in \mathbb{R} \exists\ y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = f(x)\}$$

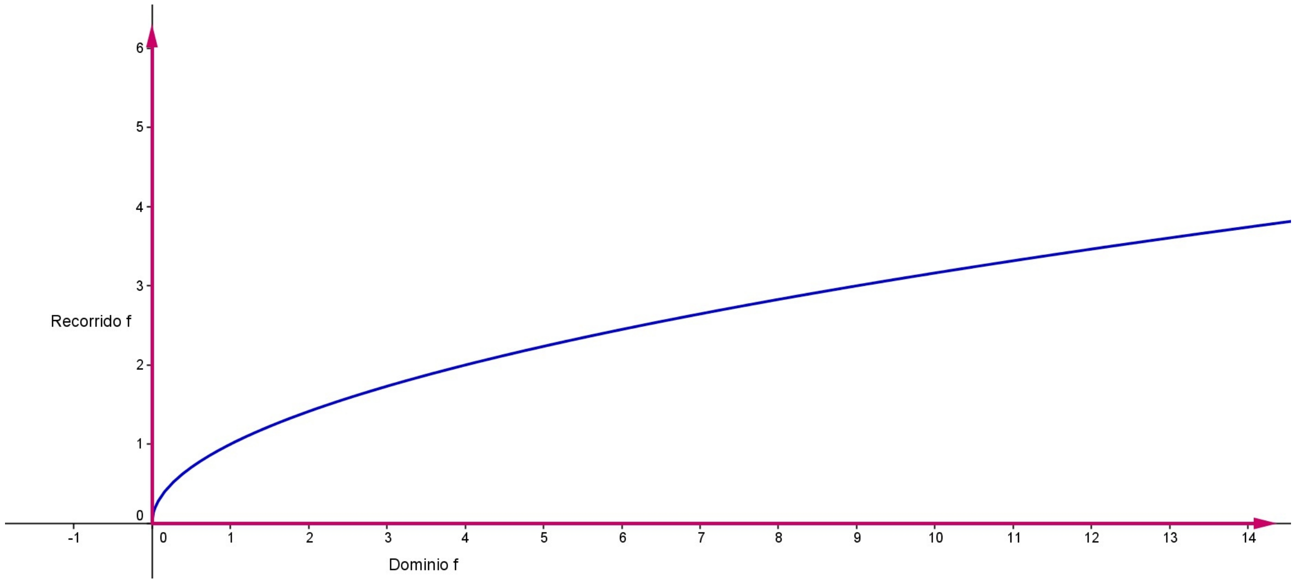
Y denominamos **recorrido o imagen de la función f** , al subconjunto de $\mathbb{R}$ que toma los valores $y = f(x)$, es decir

$$Ima_f = \{y \in \mathbb{R} \exists\ x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = y\}$$

 # Ejemplos.-

- *El dominio de la función* $f(x) = 2x + 3$ *es el conjunto de los números reales, es decir* $Dom_f = \mathbb{R}$ *, ya que para cualquier* $r \in \mathbb{R}$ *, está definida la expresión* $2r + 3$ *. Y su recorrido es también* $\mathbb{R}$ *(* $Ima_f = \mathbb{R}$ *), ya que para cualquier* $r \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $r = 2x + 3$ *, es decir* $x = \frac{r-3}{2}$

- *El dominio de la función* $f(x)=+\sqrt{(x)}$ *es el conjunto de los números reales positivos mas el cero, es decir* $dom_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ *, ya que para cualquier número negativo no está definida la raíz cuadrada. Y su recorrido es también* $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ ($Ima_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ *), ya que para cualquier ,* $r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ $\exists x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ tal que $r=+\sqrt{x}$ *, es decir* $x=r^2$



La gráfica de una función f, son los puntos del plano

$$(x,y): x\in Dom_f \; e \; y=f(x)$$

Funciones definidas por fórmulas y tablas

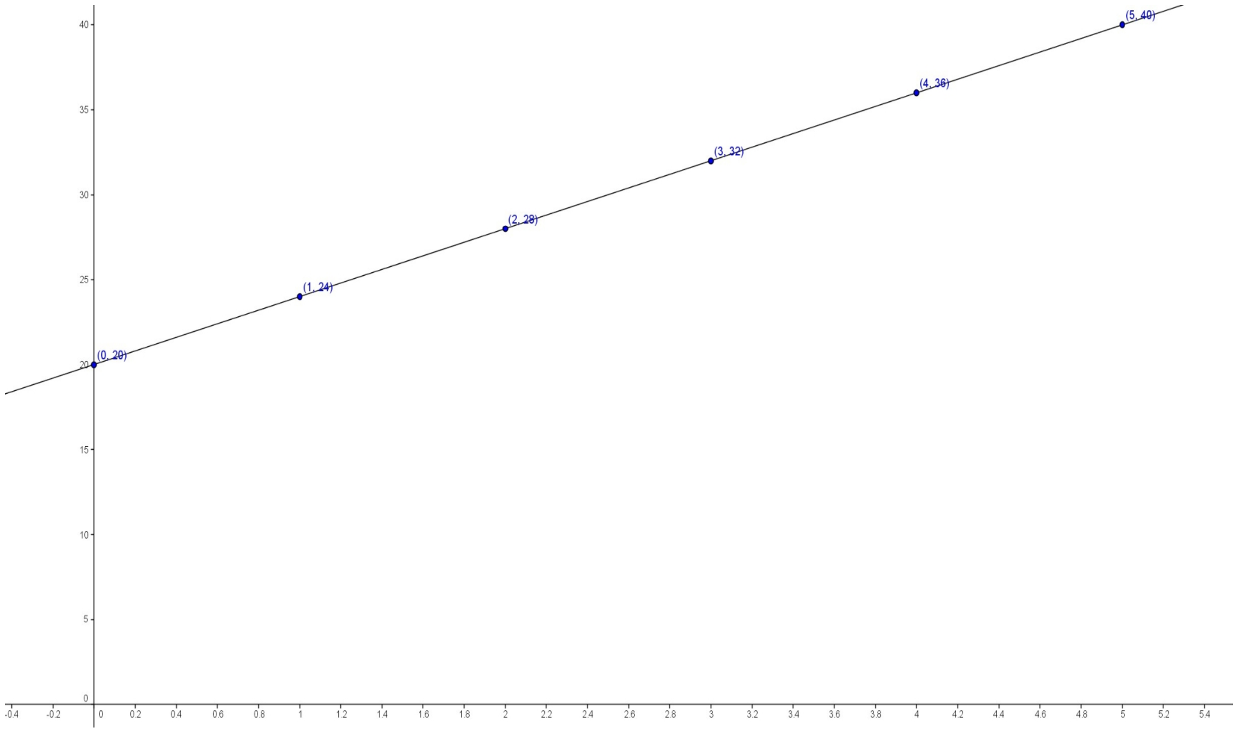
Una función puede venir definida por una función algebraica o por un conjunto de pares de valores (x,y) , que habitualmente vienen representado en una tabla y los valores de x representan los valores de la variable independiente y los valores de y la variable dependiente.

Cuando conocemos un conjunto de pares de valores (x,y) de una función, si no sabemos cual es el dominio de definición de la función f, si no sabemos si es continua, etc. Lo que solemos hacer es encontrar una función $f(x)=y$, tal que todos los pares de valores de la tabla cumplan la relación $f(x)=y$. Este método lo denominamos **interpolación**. Además, si queremos calcular valores de la función tal que los valores de la variable independiente estén fuera del intervalo que contiene a los valores de la tabla, denominaremos método de extrapolación.

 # Ejemplo.- Se han medido las temperaturas de un líquido a medida que se calentaba. La tabla de temperatura-tiempo obtenida es la siguiente:

Tiempo t (min)	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Temperatura T (ºC)	***20***	***24***	***28***	***32***	***36***	***40***

Que si representamos los pares de puntos en el plano, dado que están alineados, posiblemente vendrán relacionados por una función lineal de la forma $y=a\,x+b$



Para calcular a y b, basta con que tomemos dos pares de valores de la tabla, por ejemplo (0,20) y (1,24) y resolvamos el sistema de ecuaciones de variables a y b.

$$20= \quad b$$

$$24=a+b$$

Cuya solución es $a=4$ *y* $b=20$ *, por tanto una función que cumple los valores de la tabla es*

$$y=4\,x+20$$

Además, si por ejemplo queremos calcular cuanto valdrá la temperatura, aproximadamente, si el tiempo es 2,5 min, como $2{,}5 \in [0{,}5]$ *, interpolando, será*

$$y=4\,.(2{,}5)+20=30º\ C.$$

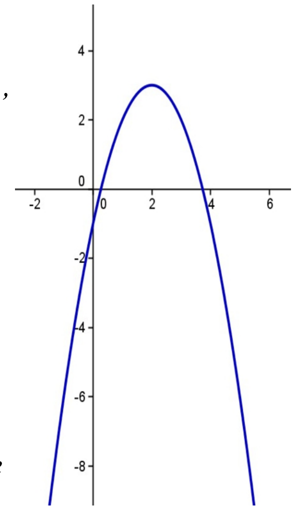
Y si por ejemplo, queremos calcular *cuanto valdrá la temperatura, aproximadamente, si el tiempo es 6 min, como* $6 \notin [0{,}5]$ *, extrapolando, será*

$$y=4.\ 6+20=44º\ C.$$

En otras ocasiones, una función puede venir expresada por una relación algebraica o fórmula de la forma

$$y=f(x)$$

 # Ejemplo.- La función $y=-x^2+4x-1$ *, sabemos que su representación gráfica es una parábola cóncava, cuyo vértice es* $\left(-\frac{b}{2a},-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+4.\left(\frac{b}{2a}\right)-1\right)=(2,3)$ *, pudiendo utilizar una tabla de valores para representar su gráfica*

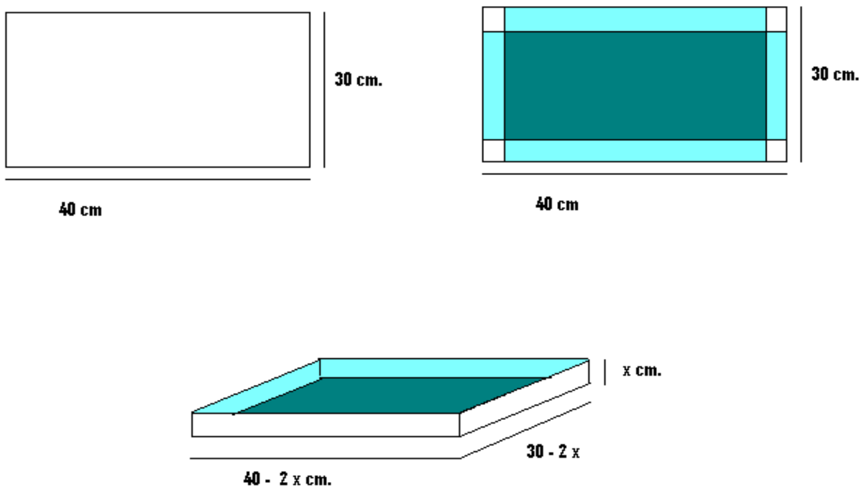


x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
y	**-1**	**2**	**3**	**2**	**-1**	**...**

 # Ejemplos.-

- *A partir de una chapa de 40 cm de largo por30 cm de ancho se quiere fabricar un recipiente rectangular cortando en cada esquina un cuadrado de x cm. De lado y plegando luego la chapa. Hallar la fórmula que da el volumen de la caja en función de x.*

  Considerando la figura, donde se esquematiza el proceso



  Por tanto el volumen en función de la altura de la caja x, será

$$V(x)=(40-2x).(30-2x).x=4x^3-140x^2+1200x$$

- *Si en el estudio de un fenómeno se ha obtenido la siguiente tabla de valores*

x	**-2**	**2**	**4**	**0**	**5**	**…**
f(x)	**5**	**1**	**5**	**?**	**10**	**...**

  Para hallar la función cuadrática de interpolación y la imagen de 0. Tomamos la función cuadrática

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Que sustituyendo en dicha ecuación los valores $(x, y)=\{(-2,5),(2,1),(4,5)\}$ *, obtenemos el sistema de tres ecuaciones, de incógnitas a, b y c*

$$5=4a-2b+c$$

$$1=4a+2b+c$$

$$5=16a+4b+c$$

cuya solución es $(a, b, c)=\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ *. Y por tanto la ecuación cuadrática, que cumple los valores de la tabla es*

$$f(x)=\frac{1}{2}.x^2-x+1$$

Que además, si $x=0$ *, será*

$$f(0)=1$$

Sucesiones de números reales

Una **sucesión de números reales** es una función

$$f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}: n\in\mathbb{N}\rightarrow f(n)$$

Los distintos valores $f(n)$ los solemos representar mediante la notación $a(n)$ o a_n

Teniendo en cuenta que dependiendo de los autores, o de la finalidad de la sucesiones, podemos tomar $\mathbb{N}=0,1,2,3,4,\ldots$ o $\mathbb{N}=1,2,3,4,\ldots$ el primer valor de la sucesión podrá ser a_0 o a_1 .

A los números $1,2,3,\ldots,$ se les denomina **índices** de la sucesión, y a los valores $a_1, a_{2.}, a_3, \ldots,$ se les denomina **términos** de la sucesión.

Al término a_n se le denomina **término general de la sucesión**.

Ejemplos.-

- Los cuatro primeros términos de la sucesión $a_n=\frac{3n+1}{4n+2}$ son

$$a_1=\frac{4}{6} \quad ; \qquad a_2=\frac{7}{10} \quad ; \qquad a_3=\frac{10}{14} \quad ; \qquad a_4=\frac{13}{18}$$

- El término general de la sucesión $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$ es $a_n=n^2$.
- El término general de la sucesión $5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$ es $b_n=2.n+3$

<u>Sucesiones aritméticas</u>

a_n es una **sucesión aritmética**, si existe un número $r>0$, denominada razón de la sucesión tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$a_{n+1} - a_n = r$$

El término general de una sucesión aritmética tiene por término general una función lineal de la forma

$$f(n) = a \,.\, n + b$$

<u>Sucesiones geométricas</u>

a_n es una **sucesión geométrica**, si existe un número $r \neq 0$, denominada razón de la sucesión tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

El término general de una sucesión geométrica tiene por término general una función lineal de la forma

$$f(n) = a \,.\, b^n$$

Ejemplos.-

- Como la sucesión 2,8, 14, 20, ... , es una sucesión aritmética, el término general será de la forma $f(n) = a.\, n + b$. Que sustituyendo, se tiene

  $$f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a + b$$

  $$f(2) = 8 \Rightarrow 8 = 2\,a + b$$

  Y cuya solución del sistema es $a = 6$ y $b = -4$. Luego, el término general, será:

  $$f(n) = 6\,n - 4$$

- Como la sucesión 3, 6, 12, 24, … , es una sucesión geométrica, el término general será de la forma $f(n) = a \,.\, b^n$. Que sustituyendo, se tiene

  $$f(1) = 3 \Rightarrow 3 = a \,.\, b$$

  $$f(2) = 6 \Rightarrow 6 = a \,.\, b^2$$

  Y cuya solución del sistema es $a = \frac{3}{2}$ y $b = 2$. Luego, el término general, será:

  $$f(n) = 3.2^{n-1}$$

Funciones recíprocas

Si $f(x)$ y $g(y)$ son dos funciones reales de variable real tal que $Ima_f \subset Dom_g$, decimos que la función $g(y)$ es recíproca de la función $f(x)$ si se cumple:

$f(g(x)) = x$ para cualquier x del dom_f

Si $f(x)$ y $g(y)$ son dos funciones reales de variable real tal que $Ima_f \subset Dom_g$ y $Ima_g \subset Dom_f$, decimos que las funciones $f(x)$ y $g(y)$ son recíprocas si se cumple:

$f(g(y)) = y$ y $g(f(x)) = x$

En dicho, caso diremos que dichas funciones son inversas y podemos también representar como $g = f^{-1}$.

 # Ejemplo.- Las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(y) = e^y$, son funciones inversas, ya que

$Ima_f = R = Dom_g$

$Ima_g = \mathbb{R}^+ = dom_f$

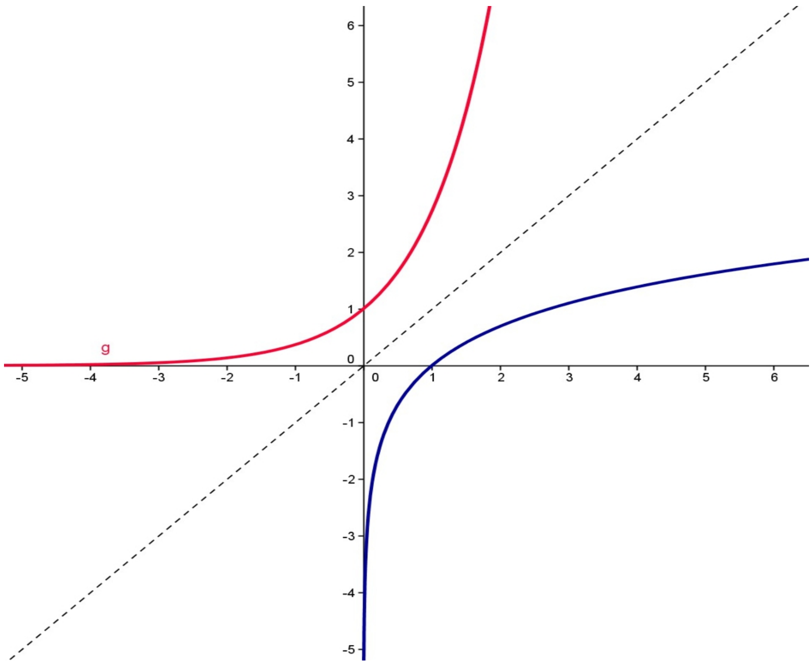
para cualquier $y \in Dom_g$ se cumple

$f(g(y)) = f(e^y) = \ln(e^y) = y$

para cualquier $x \in Dom_f$ se cumple

$g(f(x)) = g(\ln x) = e^{\ln x} = x$

Luego, $g = f^{-1}$



Hay que observar que si $f^{-1}(x)$ es la función inversa de $f(x)$, para cada $(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x)$, se cumple que $(f(x), x)$ pertenece a la gráfica de $f^{-1}(x)$, luego las gráficas de $f(x)$ y de , son $f^{-1}(x)$ simétricas respecto de la recta $y=x$.

 # Ejemplos.-

- $f(x)=2x$ *y* $g(x)=\frac{x}{2}$ *, son funciones recíprocas, ya que* $Dom_f=Dom_g=\mathbb{R}$ *y para cada número real x, se cumple*

$$f(g(x))=f\left(\frac{x}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)=x$$

$$g(f(x))=g(2\cdot x)=\frac{2\cdot x}{2}=x$$

- *Para hallar la función recíproca de la función* $y=2x+5$ *, basta con que despejemos la x, de dicha expresión algebraica, es decir*

$$x=\frac{y-5}{2}$$

Y dado que ambas funciones tiene como dominio todos lo números reales, basta con que intercambiemos las variables, es decir, la función recíproca será

$$y=\frac{x-5}{2}$$

- *Para hallar la función recíproca de la función* $y=x^3$ *, basta con que despejemos la x , de dicha expresión algebraica, es decir*

$$x=\sqrt[3]{y}$$

Y dado que ambas funciones tiene como dominio todos lo números reales, basta con que intercambiemos las variables, es decir, la función recíproca será

$$y=\sqrt[3]{x}$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales

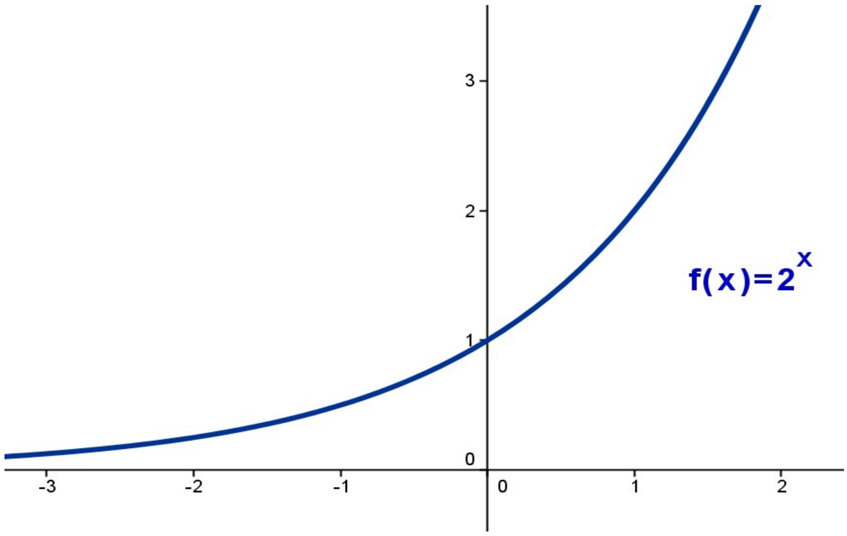
La función exponencial de base $a>0$, con $a\neq 1$ es de la forma

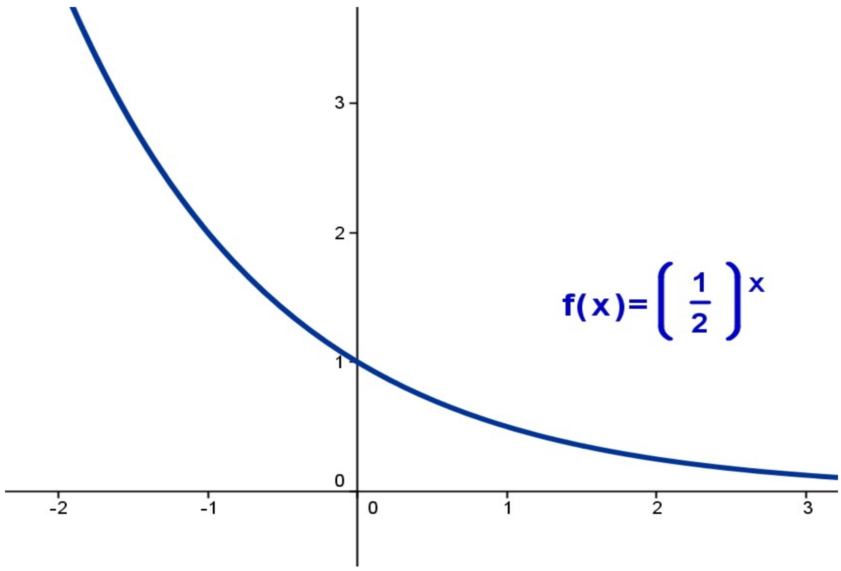
$$f(x)=a^x$$

Hay que observar (*como estudiaremos en temas posteriores*) que es una función continua y su dominio de definición es $\mathbb{R}$. Además

- Si $a < 1$, si $x \rightarrow -\infty \Rightarrow a^x \rightarrow +\infty$ y si $x \rightarrow +\infty \Rightarrow a^x \rightarrow 0$ y es decreciente.
- Si $a > 1$, si $x \rightarrow -\infty \Rightarrow a^x \rightarrow 0$ y si $x \rightarrow +\infty \Rightarrow a^x \rightarrow +\infty$ y es creciente.

Podemos representar de forma aproximada, como ejemplos dos gráficas de funciones exponenciales (*de base 2 y* $\frac{1}{2}$ *respectivamente*), dado distintos valores a la variable independiente x y hallando los valores de la variable dependiente y.





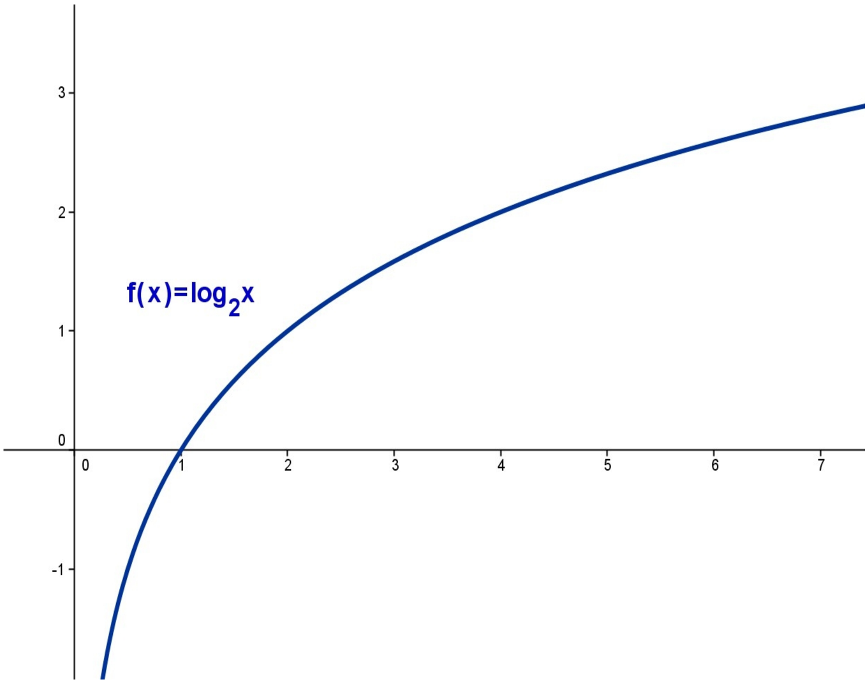
En particular, si $a = e \approx 2{,}71828182845$, denominamos exponencial natural.

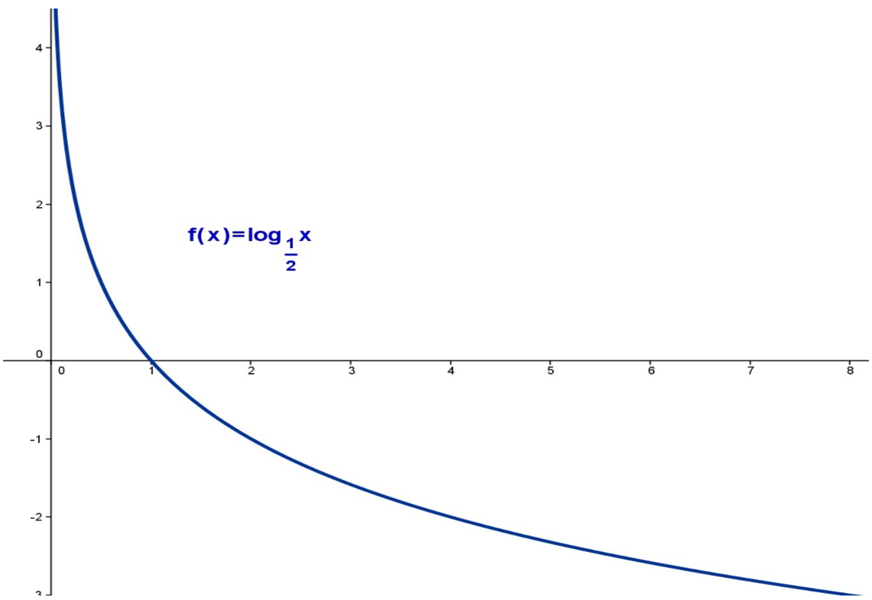
<u>Funciones logarítmicas</u>

Teniendo en cuenta que $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$, la función $f(x) = \log_a x$ es la función recíproca de la función exponencial de base a, y teniendo en cuenta que la función exponencial es continua, de dominio $\mathbb{R}$ y de recorrido $\mathbb{R}^+$, se cumplirá, $Dom(\log_a) = \mathbb{R}^+$ e $Ima(\log_a) = \mathbb{R}$. Además

- Si $a<1$, si $x\to 0^{+} \Rightarrow \log_a x \to +\infty$ y si $x\to +\infty \Rightarrow \log_a x \to -\infty$ y es decreciente.
- Si $a>1$, si $x\to 0^{+} \Rightarrow \log_a x \to -\infty$ y si $x\to +\infty \Rightarrow \log_a x \to +\infty$ y es creciente

Podemos representar de forma aproximada, como ejemplos dos gráficas de funciones logarítmicas (*de base 2 y* $\frac{1}{2}$ *respectivamente*), dado distintos valores a la variable independiente x y hallando los valores de la variable dependiente y





En particular, si $a=e\approx 2{,}71828182845$, denominamos logaritmo natural y neperiano.

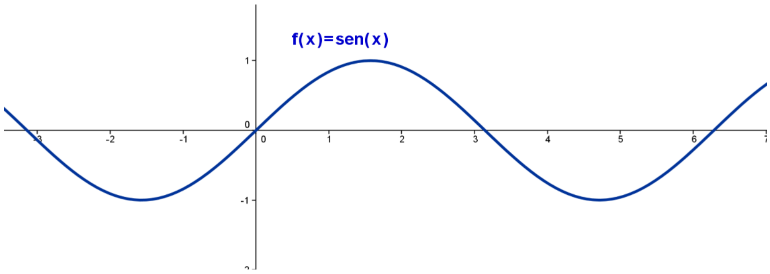
Funciones seno, cosecante y arco seno

La función $f(x)=sen\,x$ es una función continua, periódica (*de periodo* 2π), e impar (*o simétrica respecto del origen de coordenadas*), ya que cumple

$$sen(x+2\pi)=sen(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\quad sen(x)=-\,sen(-x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Además, como podremos comprobar en temas posteriores la función $sen\,x$ es creciente $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

Podemos representar de forma aproximada la función $f(x)=sen\,x$

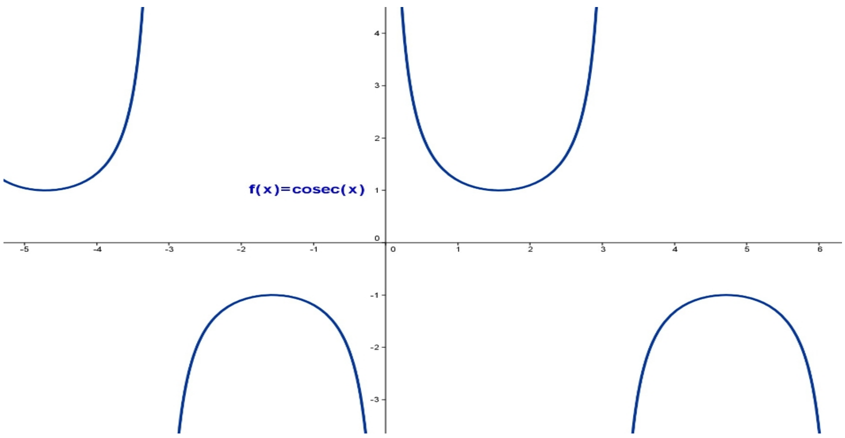


La función $f(x)=cosec\,x=\dfrac{1}{sen\,x}$ es una función discontinua en los puntos $x=k\pi$, para cualquier número entero k, y también es periódica (*de periodo* 2π), e impar (*o simétrica respecto del origen de coordenadas*), ya que cumple

$$cosec(x+2\pi)=cosec(x)\ \ \forall x\in Dom\ cosec\ ,\quad cosec(x)=-cosec(-x)\ \ \forall x\in Dom\ cosec$$

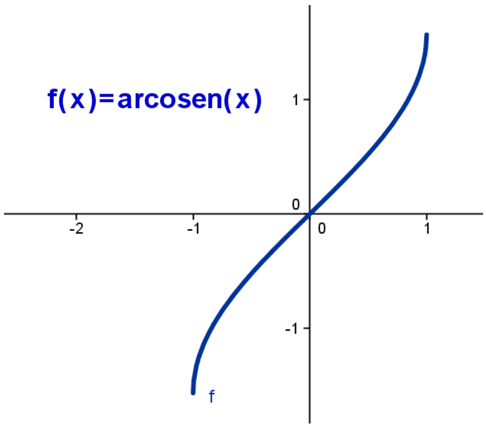
Además, como podremos comprobar en temas posteriores si consideramos el intervalo $[0,2\pi]$ (*el resto se deduce por periodicidad*) la función $cosec\,x$ es decreciente $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y creciente en $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Podemos representar de forma aproximada la función $f(x)=cosec\,x$



Dado que $sen\,x$ es una función periódica (*de periodo* 2π), para que tenga función recíproca que tome todos los valores del recorrido y no se repitan, tenemos que tomar el dominio de $sen\,x$ un intervalo de la forma $\left(\frac{(2\,.\,k-1)\pi}{2},\frac{(2.\,k+1)\pi}{2}\right)$ siendo k un número entero.

Si tomamos $k=0$, obtenemos la función recíproca $f(x)=arco\ sen\,x$, que teniendo en cuenta que su gráfica es simétrica a sen x respecto de la recta y = x, podemos representar de forma aproximada

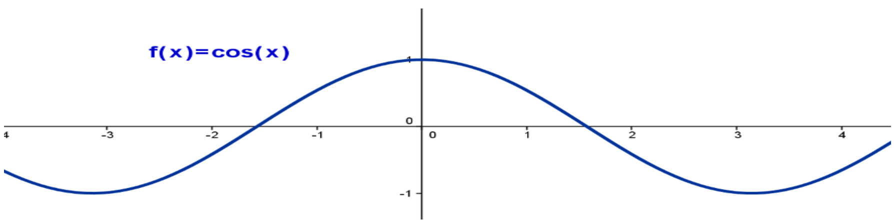


Función coseno, secante y arco coseno

La función $f(x)=\cos x$ es una función continua, periódica (*de periodo* 2π), y par (*o simétrica respecto del eje OY*), ya que cumple

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\quad \cos(x)=\cos(-x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Además, como podremos comprobar en temas posteriores la función $\cos x$ es decreciente $(0,\ \pi)$ y creciente en $(\pi,2\pi)$. Pudiendo representar de forma aproximada la función $f(x)=\cos x$

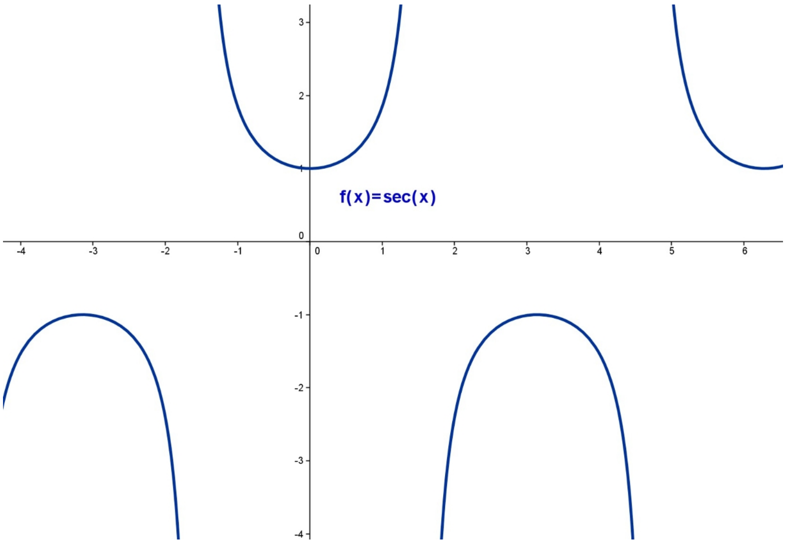


La función $f(x)=sec\,x=\frac{1}{\cos x}$ es una función discontinua en los puntos $x=\frac{k\pi}{2}$, para cualquier número entero k, y también es periódica (*de periodo* 2π), y par (*o simétrica respecto del eje OY*), ya que cumple

$$sec(x+2\pi)=sec(x)\ \ \forall x\in Dom\ sec\ ,\quad sec(x)=-\,sec(-x)\ \ \forall x\in Dom\ sec$$

Además, como podremos comprobar en temas posteriores si consideramos el intervalo $[0, 2\pi]$ (*el resto se deduce por periodicidad*) la función $sec\, x$ es creciente $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y decreciente en $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Podemos representar de forma aproximada la función $f(x) = sec\, x = \frac{1}{\cos x}$

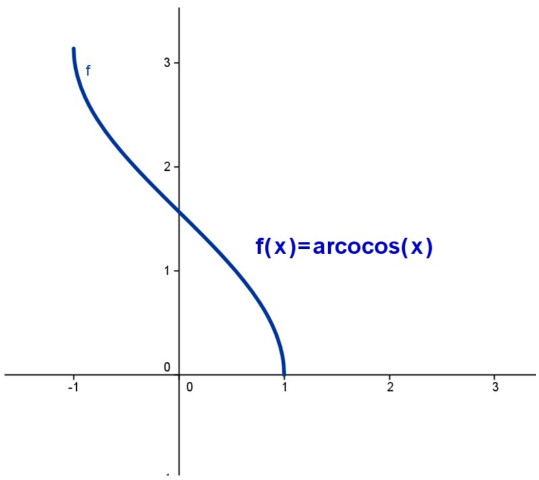


Dado que $\cos x$ es una función periódica (*de periodo* 2π), para que tenga función recíproca que tome todos los valores del recorrido y no se repitan, tenemos que tomar el dominio de $\cos x$ un intervalo de la forma $(k\pi, (k+1)\pi)$ siendo k un número entero.

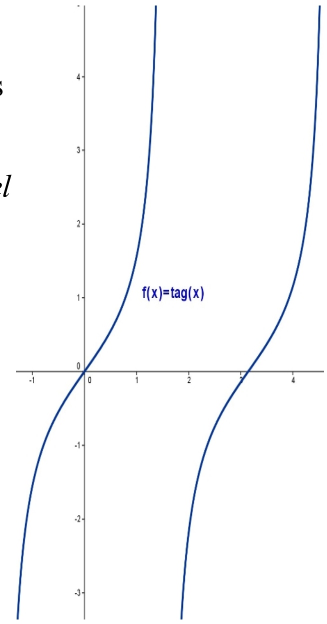
Si tomamos $k=0$, obtenemos la función recíproca

$$f(x) = arco \cos x$$

que teniendo en cuenta que su gráfica es simétrica a cos x respecto de la recta y = x, podemos representar de forma aproximada



Función arco tangente, cotangente y arcotangente



La función $f(x)=tg\,x$ es una función discontinua en los puntos $x=\frac{k\pi}{2}$ y, periódica (*de periodo* π), e impar (*o simétrica respecto el eje de coordenadas*), ya que cumple

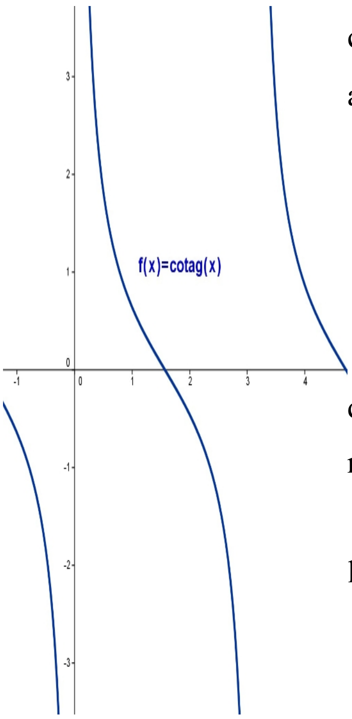
$$tg(x+2\pi)=tg(x) \quad \forall x \in Dom\ tg ,$$

$$tg(x)= -tg(-x) \quad \forall x \in Domtg$$

Además, la función $tg\,x$ es creciente en todo el dominio de la función.

Podemos representar la función $f(x)=tg\,x$.

La función $f(x)=cotg\,x=\frac{1}{tg\,x}$ es una función discontinua en los puntos $k\pi$, para cualquier número entero k, y también es periódica (*de periodo* π), además es decreciente en todo el dominio de la función.



Podemos representar la función $f(x)=cotg\,x$

Como $tg\,x$ es una función periódica (*de periodo* π), para que tenga función recíproca que tome todos los valores del recorrido y no se repitan, tenemos que tomar el dominio de $sen\,x$ un intervalo de la forma $\left(\frac{(k-1)\pi}{2},\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ siendo k un número entero.

Si tomamos $k=0$, obtenemos la función recíproca

$$f(x)=arco\ tg\,x$$

que teniendo en cuenta que su gráfica es simétrica a tg x respecto de la recta y = x, podemos representar de forma aproximada