

Complexe getallen

Karel Appeltans

10 december 2020

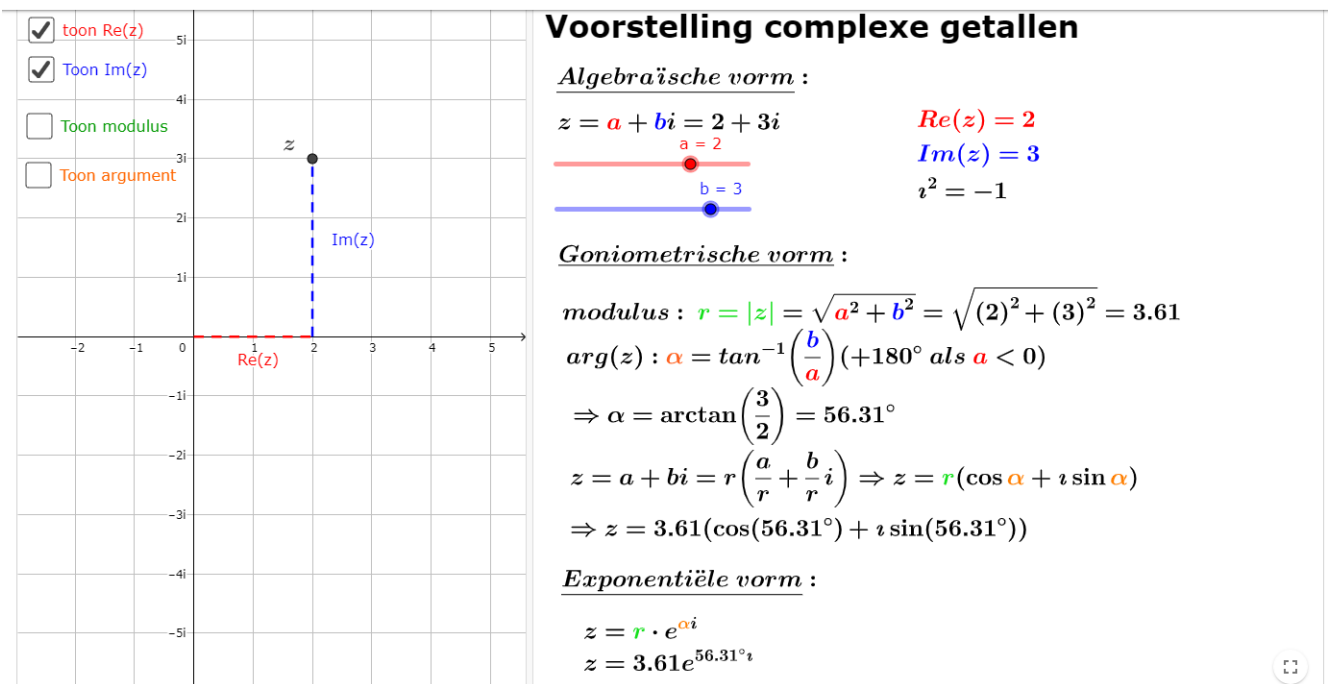
1 Inleiding

In 1545(!) publiceerde Cardano (Italiaans wiskundige) het wiskundeboek 'Ars Magna'. Onder andere volgend vraagstuk werd besproken: Zoek twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40. Kan jij ze vinden?

Meer over de oorsprong (en inleiding) van de complexe getallen in volgend filmpje http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_NL.htm (hoofdstuk 5)

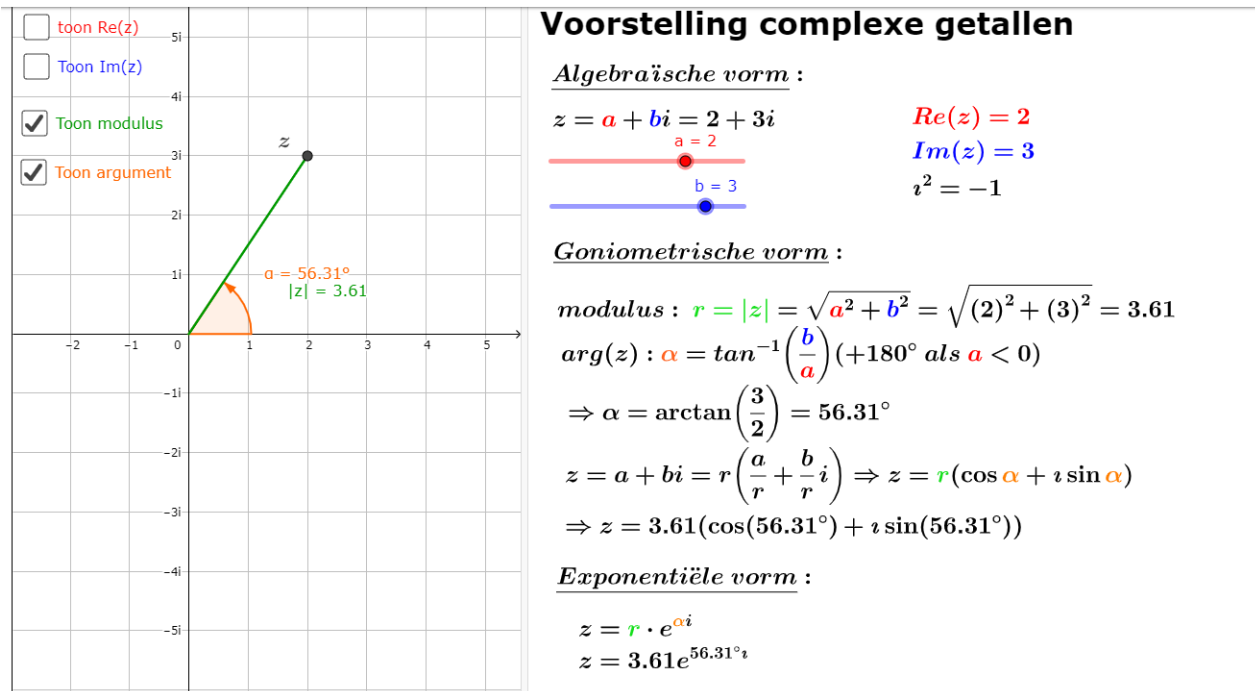
2 Voorstelling complex getal in Argandvlak

2.1 Algebraïsche vorm



Figuur 1: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

2.2 goniometrische en exponentiële vorm



Figuur 2: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

3 Bewerkingen

3.1 algebraïsche vorm

Bewerkingen met complexe getallen in algebraïsche vorm:

$$z_1 = 2 + i \quad z_2 = 5 - 3i \quad k = 3$$

Toegevoegde

$$\overline{z_1} = 2 - i$$

$$\overline{z_2} = 5 + 3i$$

Optelling

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (5 - 3i) = (2 + 5) + (1 + -3)i = 7 - 2i$$

Scalaire vermenigvuldiging

$$3 \cdot z_1 = 3(2 + i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1i = 6 + 3i$$

Vermenigvuldiging

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (5 - 3i) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot -3i + 1 \cdot 5i + 1 \cdot -3i^2 = 13 - i$$

Deling

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{5 - 3i} = \frac{2 + i}{5 - 3i} \cdot \frac{5 + 3i}{5 + 3i} = \frac{(2 + i) \cdot (5 + 3i)}{(5 - 3i) \cdot (5 + 3i)} = \frac{7 + 11i}{34 + 0i} = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$$

Figuur 3: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

3.2 goniometrische en exponentiële vorm

Bewerkingen met complexe getallen in gon/exp vorm:

$z_1 = 2 + 3i = \sqrt{13} \cdot e^{56.31^\circ i}$

$z_2 = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{135^\circ i}$

Vermenigvuldiging

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{13}e^{56.31^\circ i} \cdot \sqrt{2}e^{135^\circ i} = (\sqrt{13} \cdot \sqrt{2})e^{(56.31^\circ + 135^\circ)i} = \sqrt{26}e^{191.31^\circ i} = -5 - i$

Machtsverheffing $n = 3$

$z_1^n = (2 + 3i)^3 = (\sqrt{13}e^{56.31^\circ i})^3 = \sqrt{13}^3 e^{3 \cdot 56.31^\circ i} = 13 \sqrt{13}e^{168.93^\circ i} = -46 + 9i$

Deling

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{13}e^{56.31^\circ i}}{\sqrt{2}e^{135^\circ i}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} e^{(56.31^\circ - 135^\circ)i} = \frac{1}{2} \sqrt{26}e^{-78.69^\circ i} = \frac{1 - 5i}{2}$

Figuur 4: <https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3>

3.3 worteltrekking

Worteltrekking uit een complex getal:

$z = 0 - 8i = 8e^{270^\circ i}$

$n = 3$ *Los op $w^3 = 0 - 8i$*

Oplossingen:

$w = re^{\alpha i} \Rightarrow (re^{\alpha i})^3 = 8e^{270^\circ i}$

$\Leftrightarrow r^3 e^{3\alpha i} = 8e^{270^\circ i}$

$r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 = 2$

$3\alpha = 270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 90^\circ + k120^\circ, k = 0, 1, \dots, 2$

$w_0 = 2 e^{90^\circ i} = 0 + 2i$

$w_1 = 2 e^{210^\circ i} = -1\sqrt{3} - 1i$

$w_2 = 2 e^{330^\circ i} = \sqrt{3} - 1i$

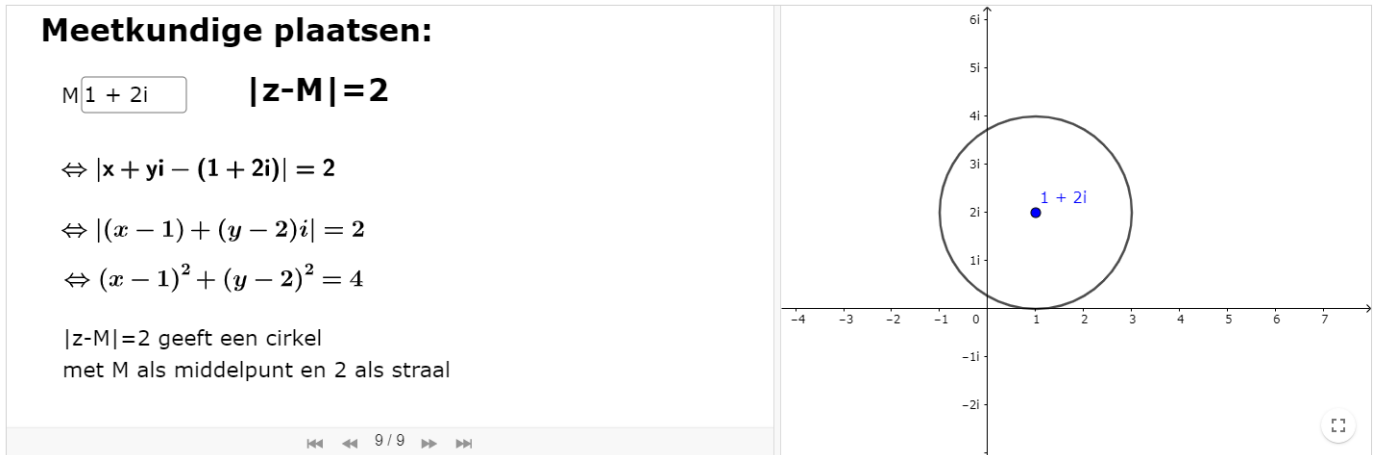
Figuur 5: <https://www.geogebra.org/m/a9TNGhWs>

4 Veeltermen over \mathbb{C}

4.1 reële coëfficiënten

4.2 complexe coëfficiënten

5 Meetkundige plaatsen



Figuur 6: <https://www.geogebra.org/m/cprfsqvu>

6 Complexe getallen vandaag

LINEAR ALGEBRA
AS A KEY STIMULATOR FOR
QUANTUM COMPUTING

SEPTEMBER 25TH 2019
14:45 HRS. - 15:00 HRS.

General Quantum Gate

$|\psi\rangle \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow |\psi'\rangle$
 $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

where A is a Unitary operator

operator:	Example of a "Conjugate Transpose"	Example of a "Unitary Operator"
Transpose of A ment	$\begin{pmatrix} 5+i & 3-7i \\ 8+2i & 9-2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-i & 8-2i \\ 3+7i & 9+2i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix}$

7 Extra Oefeningen

1. De complexe getallen z_1, z_2 en z_3 voldoen aan de vergelijking $\frac{2}{z_1} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$. Bepaal z_1 als $z_2 = 2 + 3i$ en $z_3 = 3 - 2i$
2. De veelterm $x^3 + 10x^2 + 35x + 44$ heeft als wortel $-3 + \sqrt{2}i$. Bepaal de andere wortels.
3. Bepaal A^{-1} als $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$
4. Schrijf $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ in de vorm $a + bi$
5. Als $z \neq 0$ een complex getal is dan geldt
 - (a) als $Re(z) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$
 - (b) als $Re(z^2) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$
 - (c) als $Re(z) = 0 \Rightarrow Re(z^2) = 0$
 - (d) geen van voorgaande beweringen is juist