Az Egy mértani helyes probléma megoldása

Elsősorban engedtessék meg nekem, hogy a probléma szövegezésén annyiban változtassak, hogy abba pár, megfelelő jelölést illesszek:

Legyen adott a síkban az *A* és *B* pont. A sík minden *P* pontjához rendeljük hozzá azt a *Q* pontot, amelyet az *AP*-ra merőleges *a* és a *BP*-re merőleges *b* egyenesek metszéspontjaként kapunk! Mi a *Q* pontok mértani helye, ha *P* végigfut egy adott *p* egyenesen?

Amint az látható a feladat értelmezését ezek a vátoztatások sokban nem változtatták meg.

A problémát két különböző szemszögből sikerült megvizsgálnom, az egyik projektív geometriai ihletésű, a másik analitikus. Mindkettő arra vezet, hogy a keresett mértani hely **kúpszelet.**

Mindkettőnek megvan a maga tanulsága: a projektív magyarázathoz szükségesek e szakág kissé mélyebb ismeretei, az analitikus megoldás viszont részben középiskolai ismeretekkel megoldható, bár a megoldás diszkúziója már keményebb dió.

Nos lássuk előbb röviden a projektív magyarázatot:

Az adott sugársor egyeneséhez annak merőlegesét (ugyanahhoz a sugársorhoz tartozó) rendelő leképezés merőleges involúció, s mint ilyen elliptikus involúció. Két involúció szorzata projektivitást határoz meg. Az *A* és *B* pontokhoz, mint sugársorokhoz ez a projekivitás egy, az *A* ill. *B* ponton áthaladó kúpszeletet határoz meg.

A magyarázatot szakzsargon, és szigorú bizonyítás helyett megprobálom inkább az egyes speciális esetek vizsgálatával megvilágítani, s csak annyi szakismeretet felhasználni amely ehhez feltétlen szükséges.

Szűkítsük a kört: vajon milyen kúpszelet keletkezhet így? És most aztán jól jönnek a projektív geometriai ismeretek! Itt ugyanis értelmezhetjük párhuzamos egyenesek metszéspontját is, ezek úgymond a „végtelenben" metszik egymást,s ez a végtelenbeli pontot az egyenes ún. ideális pontjának nevezzük. A reguláris (valódi) kúpszeleteket aszerint osztályozzuk, hogy az ideális, ún. "végtelenbeli" egyenessel hány közös pontja van: az ellipszisnek egy sincs, a parabolának egy (a tengelyének ideális pontja) és a hiperbolának kettő (az aszimptotái ideális pontjai).

Nomármost a *P* futópont a *p* egyenes minden pontját felveszi, nézzük meg mi történik, ha épp az *p* O *AB* ponttal egyezik meg. Ekkor az *a* és *b* egyenesek párhuzamosak, ergo ez esetben metszetük ideális pont. Nem nehéz elképzelni, hogy ez az *A, B* pontok és a *p* egyenes tetszőleges megválasztása esetén fennáll, tehát a keresett mértani helynek legalább egy pontja ideális, vagyis a reguláris kúpszeletek közül az ellipszis most kiesik.

Jogosan merülhet fel a kérdés: és mi van akkor, ha ez a projektivitás nem reguláris kúpszeletet definiál? Nos itt lépnek a képbe az *A, B* pontok és a *p* egyenes speciális helyzetei:

1.) Legyen *A* és *B* különböző és az egyik pont mondjuk *A* a *p* egyenesen, ekkor a Q pontok mértani helye nyilvánvalóan az *a* egyenes, tehát egy szinguláris (elfajult) kúpszelet.
2.) Legyen *A* és *B* különböző és mindkét pont a *p* egyenesen, ekkor a Q pontok mértani helye nyilvánvalóan a *p*-re merőleges *a* és *b* egyenesek metszéspontja, azaz azok ideális pontja. Ez is egy szinguláris (elfajult) kúpszelet.
3.) Az *A, B* pontok essenek egybe de ne legyenek a *p* egyenesen. Ekkor *P* minden helyzetére *Q*-ra mivel *a* és *b* párhuzamos, az adott irány ideális pontját kapjuk. Ha *P* végigfut a *p*-n, akkor ez az pont végigfut az sík ideális egyenesén, azaz megint szingularis kúpszelet a

keresett mértani hely. (Vagy ha metszetnek az egész egyenest vesszük, akkor igy az egész síkot kapnánk?)

4.) Az A és B pontok essenek egybe és legyenek a p egyenesen. Ekkor P minden helyzetére Q-ra megint az A-ban vett p-re merőleges egyenes ideális pontját kapjuk. (Vagy esetleg megintcsak metszetnek az egész egyenest véve, az A-ban vett p-re merőleges egyenest?)

A többi esetben viszont olyan reguláris kúpszeletet kell kapjunk (vizsgálandó ez okból, hogy az említett eseteken kívül előadódhatnak-e máshelyütt is szingularitások!), amiről tudjuk, hogy ideális pontja lévén nem lehet ellipszis.

Hogy ezek a reguláris kúpszeletek vajon mikor adnak parabolát, illetve hiperbolát az által dönthetjők el, hogy ideális egyenessel hány közös pontja van.

Amint az könnyen ellenőrizhető, **ha az *AB* párhuzamos a *p* egyenessel**, **csak akkor** lesznek az a és b egyenesek egymással párhuzamosak, ha P-t a p egyenes ideális pontjának válasszuk (lásd alább). Ez esetben tehát a kapott kúpszelet **parabola**.

Ellenkező esetben a kapott kúpszelet hiperbola. Nem akarván túlságosan elmélyedni az elméletben, de annyi tiszta logikát követve is belátható, hogy ha a P pontot a p egyenes ideális pontjának válasszuk mint az előbb is, akkor a PA illetve PB egyenesek párhuzamossága folytán az a és b egyenesek is párhuzamosak, ergo metszetük ideális pont. Azonban ez esetben ha a P pontot a p és az AB egyenesek metszéspontjába választanánk, akkor az a, b egyenesek megintcsak párhuzamosak, s ez megadja a kúpszelet második ideális pontját is. (Az előző esetben ez a metszéspont a p egyenes ideális pontjába került.)

Az analitikus megközelítés:

Annak erdekében, hogy minnél egyszerűbben jussunk célhoz, válasszunk minél megfelelőbb vonatkoztatási rendszert. Legyen e célból a koordinátarendszer x tengelye a p egyenes, és mondjuk bírjon a következő koordinátákkal az A pont: $(0,1)$, ezáltal a kartézi-koordinátarendszer adott. Ekkor legyen a B általános pont: $B(p,q)$, a P futópont pedig $P(t,0)$, ahol p,q valós számok, t pedig valós paraméter.

Nem nehéz azek alapján felírni az a illetve b egyenes általános egyenletét, lévén azok a PA és PB vektorokra merőlegesek:

$$a: \ -tx + y - 1 = 0$$

$$b: \ (p-t)x + qy + pt - p^2 - q^2 = 0$$

Némi algerbrai ügyeskedéssel (a t paraméter kiküszöbölésével) a metszéspontok mértani helyét meg tudjuk adni a következő alakban:

$$px^2 + (q-1)xy + (1 - p^2 - q^2)x - py + p = 0 \ ,$$

amiből kitűnik, hogy másodrendű görberől van szó, lévén, hogy a x-nek négyzetes tagja is szerepel a kifejezésben. Viszont ez a kúpszelet nem kanonikus elhelyezésű, ezért annak vizsgálata, hogy mikor milyen kúpszeletet kapunk (mikor lesz az reguláris, előadódhat-e ellipszis, stb.) sem oly egyszerű, bár nem megvalósíthatatlan...

Mindenesetre a projektív geometriai eredményeket ezen egyenlet segítségével is leellenőrizhetjük.

Összefoglalva: **A keresett mértani hely olyan kúpszelet (reguláris, vagy szinguláris), amelynek legalább egy ideális (végtelenbeli) pontja van**.

Ha az itt leírtak, tán nem tűnnek teljes, alaposan feldolgozott megoldásnak, akkor a kedves olvasó megpróbálhatja az itt megkezdetteket folytatni, mindenesetre úgy vélem kiindulásnak azért megteszi.

Aki ezek után esetleg szeretne kissé belemerülni a projektív geometria rejtelmeibe, akkor annak a következő irodalmat ajánlanám:

Hajós György: Bevezetés a geometrtiába

H. M. S. Coxeter: Projektív geometria