Herr M aus D spart noch in der Spardose.
Er hat bereits 300 € gespart.
Jeden Monat legt er weitere 5 € in die Spardose

a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion Sparbetrag an, die jedem Zeitpunkt x in Monaten den gesparten Betrag Sparbetrag(x) in € zuordnet.

Es handelt sich um ein lineares Wachstum, weil in gleichen Zeiträumen (hier ein Monat) immer der gleiche Betrag (hier 5 €) hinzukommt.

$$f(x) = m \cdot x + b$$

m ist mathematisch die Steigung und im Sachkontext die Änderungsrate: $m = 5 \frac{€}{\text{Monat}}$

b ist mathematisch der y-Achsenabschnitt und im Sachkontext der Anfangswert zum Zeitpunkt $x = 0$

$$b = 300\,€$$

$$\text{Sparbetrag}(x) = 5x + 300$$

Leider nimmt der Wert des Geldes im Moment (November 2022) um ca. ~~10% pro Jahr~~ ab.
Nach einem Jahr ist das gesparte Geld nur noch 90% des ursprünglichen Betrags wert.
Hier handelt es sich um einen exponentiellen Verfall des Wertes.
Das exponentielle Wachstum und der exponentielle Zerfall (oder Verfall) sind dadurch gekennzeichnet, dass in immer gleichen Zeiträumen (hier 12 Monate = 1 Jahr) eine Größe (hier der Geldwert) mit immer der gleichen Zahl multipliziert wird (hier 0,9)
Prozentuales Wachstum / prozentualer Verfall ist stets exponentielles Wachstum / exponentieller Verfall mit dem Faktor:

$$1 + \frac{p}{100}$$

Hier: $p = -10$ (Prozent)

$$\Rightarrow \text{Faktor: } 1 + \frac{-10}{100} = 0{,}9$$

Die Funktion, die ein exponentielles Wachstum beschreibt hat immer die Struktur:

$$\text{Größe}(x) = \text{Anfangswert} \cdot \text{Faktor}^{\frac{x}{\text{Zeit}}}$$

Zeit: Genauer: Zeit, auf die sich der Faktor bezieht

Hier:

$$\text{Anfänglicher Geldbetrag} \cdot 0{,}9^{\frac{x}{12}}$$

b) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion Wert an, die jedem Zeitpunkt x in Monaten den Wert des Geldes nach heutigem Wert in der Spardose zuordnet.

Zuerst ein Zahlenbeispiel.
Situation in 6 Monaten

$$\text{Sparbetrag}(6) = 300 + 5 \cdot 6 = \underline{\underline{330}}$$

In 6 Monaten wird Herr M aus D also 330 € in der Spardose haben.
Was kann er sich dann noch dafür kaufen? Vergleich mit heute:

$$\underbrace{330\,€}_{\text{Sparbetrag}(6)} \cdot 0{,}9^{\frac{6}{12}} \approx 313$$

Wenn man heute 330 € hat, dann kann man in 6 Monaten damit noch so viel kaufen... wie heute für 313 €

$$\text{Wert}(x) = \text{Sparbetrag}(x) \cdot 0{,}9^{\frac{x}{12}}$$

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Geld in der Spardose den heutigen Wert von 300 € hat.

$$\text{Wert}(x) = 300$$

$$(300 + 5x) \cdot 0{,}9^{\frac{x}{12}} = 300$$

Eine triviale Lösung: $x = 0$

denn: $\underbrace{(300 + 5 \cdot 0)}_{=300} \cdot \underbrace{0{,}9^{\frac{0}{12}}}_{=1} = 300$ ✓

Gleichungen, bei denen x in einem Faktor und in einem Exponenten vorkommt, kann man nicht mit der Hand lösen. → CAS

$$\text{Wert}(x) = 300 \quad | \text{ CAS}$$

$$x \approx 133{,}17$$

Nach 133,17 Monaten ist das Geld in der Spardose wieder so viel Wert, wie am Anfang in der Spardose war.
Im der Spardose sind dann 965 €

1	330*0.9^(6/12)
	→ $99\sqrt{10}$
2	$1
	≈ **313.0655**
3	(300+5*x)*0.9^(x/12)=300
	≈ $5\,x\,e^{-0.0088x} + 300\,e^{-0.0088x} = 300$
4	$3
	NLöse: $\{x = 1.4393 \cdot 10^{-12}, x = 133.1666\}$
5	300+5*133
	→ **965**