Aufgabe: Eine Konservendose mit 500 $ml$ Inhalt soll mit minimalem Materialverbrauch hergestellt werden. Gib die Maße und den Materialverbrauch der optimalen Dose an. Zeige, dass bei einer optimalen Dose die Höhe gleich dem Durchmesser ist. (*Falze und evtl. Prägungen sollen vernachlässigt werden.*)

Lösung: $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh \;\rightarrow\; min.$ Nebenbedingung: $500 = \pi r^2 h \;\Leftrightarrow\; h = \frac{500}{\pi r^2}$

Zielfunktion:

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\left(\frac{500}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}\right) = 2\pi r^2 + 1000r^{-1}$$

$$O'(r) = 4\pi r - 1000r^{-2} \;\wedge\; O''(r) = 4\pi + 2000r^{-3}$$

notw. Bed. lok. Extr. $O'(r) = 0$

$$\begin{aligned}
4\pi r - 1000r^{-2} &= 0 && \mid + 1000r^{-2}\\
4\pi r &= 1000r^{-2} && \mid \cdot r^2 \neq 0\\
4\pi r^3 &= 1000 && \mid : 4\pi\\
r^3 &= \tfrac{250}{\pi}\\
r &= \sqrt[3]{\tfrac{250}{\pi}} \approx 4,30127
\end{aligned}$$

hinr. Bed. lok. Extr. $O'(r) = 0 \;\wedge\; O''(r) \neq 0$

$$O''\left(\sqrt[3]{\tfrac{250}{\pi}}\right) = 4\pi + 2000\left(\sqrt[3]{\tfrac{250}{\pi}}\right)^{-3} \approx 37,7 > 0 \;\Rightarrow\; \text{lok. Min.} \checkmark$$

Randwertbetrachtung: $r \in \;]0, \infty[$

Die Funktion $O$ ist im Definitionsbereich von $r$ stetig und besitzt dort als Extremum nur ein lokales Minimum. Zu den Randwerten des Definitionsbereichs von $r$ streben die Funktionswerte gegen $+\infty$. Das lokale Minimum ist somit auch das globale Minimum im Definitionsbereich von $r$.

Höhe des optimalen Zylinders:

$$h = \frac{500}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right)^2} = \frac{500}{\pi\left(\frac{250}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{500}{\pi \cdot 250^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2 \cdot 250}{250^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \cdot 250 \cdot 250^{-\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \cdot 250^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{250}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = \underline{\underline{2r}} \approx 8,60254 \qquad \text{Höhe gleich Durchmesser} \checkmark$$

Oberfläche:

$$O\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\frac{250}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + 1000\left(\frac{250}{\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} \approx 348,7342$$

Antwort: Die Maße des optimalen Zylinders sind $r \approx 4,30127\ cm$ und $h \approx 8,60254\ cm$. Der Materialverbrauch beträgt ca. $348,7342\ cm^2$.