Teoría – Tema 1

CCSS Teoría - 3 - Continuidad y límite

Continuidad de funciones

Una función es continua en todo su dominio si es continua en todos los puntos que componen el dominio. Una función es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo.

Y la pregunta del millón: ¿Cuándo es una función continua en un punto $x=x_0$? Cuando se cumplen los tres criterios siguientes.

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x=x_0$ si:

1. Está definida la función en el punto → $\exists f(x_0)$
2. Existen los dos límites laterales y son iguales → $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$
3. El valor de la función en el punto es igual al valor del límite en el punto → $f(x_0)=L$

Ejemplo 1 resuelto

¿Es continua $f(x)=4x+5$ en el punto $x_0=2$?

Apliquemos los tres criterios de continuidad de la función en un punto.

1. $\exists f(2)=13$
2. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = L = 13$
3. $f(2)=13=L$

Por lo tanto, la función es continua en $x_0=2$.

Ejemplo 2 resuelto

¿Es continua $f(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & si & x\leq 1 \\ 3x^2-1 & si & x>1 \end{Bmatrix}$ **en el punto $x_0=1$?**

1. $\exists f(1)=1+1=2$
2. $\lim_{x \to 1^-} (x+1)=2$, $\lim_{x \to 1^+} (3x^2-1)=2$ → $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = L = 2$
3. $f(1)=2=L$

Por lo tanto, la función es continua en $x_0=1$.

Existencia única de límite

Si los límites laterales de una función $f(x)$ en un punto $x=x_0$ son diferentes, la función $f(x)$ no tiene límite en $x=x_0$ (**unicidad del límite**).

Una función $f(x)$ posee límite en $x=x_0$ si y solo si sus límites laterales son iguales. Y este límite es único.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ si y solo si $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$

Si los límites laterales coinciden en $(+\infty)$, se dice que el límite de la función es $(+\infty)$. Y si los límites laterales coinciden en $(-\infty)$, se dice que el límite de la función es $(-\infty)$.

No debemos confundir esto con el hecho de que el límite no exista. Es decir, una cosa es que el límite valga $(+\infty)$ ó $(-\infty)$, y otra cosa distinta es que el límite no exista.

Un límite no existe cuando sus límites laterales no coinciden (ya sean valores finitos o infinitos), **o cuando no esté definido su valor.** Por ejemplo, si estudiamos una raíz cuadrada o un logaritmo en valores negativos:

$\lim_{x\to -1} \sqrt{x}\to\nexists$, $\lim_{x\to -1} \ln x\to\nexists$

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \neq 0$, existe un entorno de x_0 en el que los valores que toma la función tiene el mismo signo que L . Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \neq 0 \implies \exists \delta > 0 / signo(f(x_0 - \delta)) = signo(f(x_0 + \delta)) = signo(L)$$

Para las siguientes propiedades vamos a considerar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con límites finitos en un punto x_0 .

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M,\ M \in \mathbb{R}$$

El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de cada función. Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + M$$

Igualmente, el límite de la diferencia de funciones es la diferencia de los límites:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = L - M$$

El límite del producto de funciones es el producto de los límites:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$$

El límite de una constante multiplicada por una función es igual a la constante por el límite de la función:

$$\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = k \cdot L,\ k \in \mathbb{R}$$

El límite de un cocientes de funciones es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L}{M},\ M\neq 0$$

El límite de una función elevada a otra función, es el límite de la base elevado al límite del exponente, siempre y cuando el límite de la base sea positivo.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}=L^M,\ L>0$$

Operaciones básicas con factores infinitos

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$k\pm\infty=\pm\infty,\ k\in\mathbb{R}$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

$k\cdot(\pm\infty)=\pm\infty,\ k\in\mathbb{R}\ \ y\ \ k>0$

$k\cdot(\pm\infty)=\mp\infty,\ k\in\mathbb{R}\ \ y\ \ k<0$

$\frac{k}{\infty}=0,\ k\in\mathbb{R}$

$\frac{k}{0}=\infty(indeterminación: ver\ límites\ laterales)$

¿Qué es una indeterminación?

Hasta ahora hemos calculado límites cuyo valor (finito o infinito) ha sido relativamente fácil de obtener aplicando operaciones básicas de sumar, restar, multiplicar y/o dividir.

$\lim_{x \to 3} (x^2+2x-2)=13$ → Límite finito en $x_0=0$

$\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty$ → Límite infinito en el infinito

¿Qué ocurre si, al operar en los límites, no sabemos determinar el resultado final de la operación?

Es decir, ¿qué ocurre si tengo, por ejemplo, $0\cdot\infty$? ¿El 0 hace que todo el producto sea 0 o el ∞ hace que todo el producto sea ∞ ?

Esto son ejemplos de indeterminaciones: límites donde el resultado final no se obtiene de manera evidente, sino que debemos operar convenientemente siguiendo una serie de reglas.

Tipos de indeterminaciones y ejemplos

Indeterminación $\frac{k}{0}$ **con** $k \neq 0$ → Debemos evaluar los límites laterales. Y si son iguales la función tendrá límite (aunque no esté definida en ese punto porque no podemos dividir por 0).

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0}$ → Indeterminación → Estudiamos sus límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Este tipo de indeterminaciones serán típicos en el estudio de las asíntotas verticales de una función, como veremos más adelante.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ → Si estamos ante una función racional (cociente de funciones) una primera opción es descomponer numerado y denominador para simplificar factores.

Importante: en los límites sí puedo simplificar entre numerador y denominador; al evaluar la función en un punto no puedo simplificar. No olvides nunca esto!!

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → Intento simplificar entre numerador y denominador

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

Es decir: el límite existe en $x_0 = -1$, aunque la función no esté definida en $\nexists f(-1)$ ya que no puedo dividir por 0 . Estamos ante una discontinuidad evitable en $x_0 = -1$.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ también pueden aparecer en cociente de funciones que contienen raíces cuadradas. Una buena técnica para solventar esta indeterminación es multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador o del denominador. Con esto, podremos simplificar y resolver el límite.

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado del denominador.

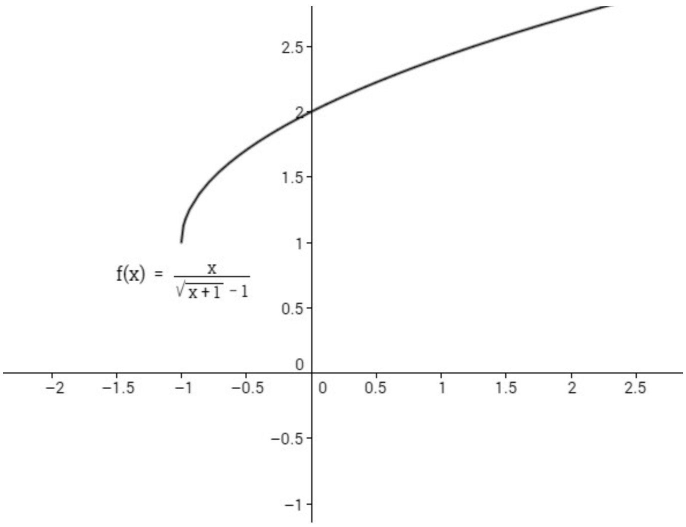
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}$$

Simplificamos entre numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$$

Podemos corroborar este valor del límite con la representación gráfica de la función. La función no está definida en $x_0=0$ pero sí existe el límite a izquierda y derecha de este punto.

La gráfica no está definida en $x_0=0$ *pero sí existe el límite en* $x_0=0$



Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ → Si esta indeterminación aparece en cociente de polinomios, o en cociente de raíces, podemos aplicar la técnica de dividir cada término por la variable x elevada al mayor exponente que aparezca en la función.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$$ → Recuerda $\frac{1}{\infty}=0$ → $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2$

Por lo tanto, nuestro límite es igual a 2 . Una regla que podemos obtener de este ejemplo es la siguiente:

si poseo un cociente de polinomios del mismo grado, el límite en el infinito es igual al cociente de los coeficientes que acompañan al mayor grado de la variable x .

Veamos otro ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \quad \to \text{Recuerda} \quad \frac{1}{\infty}=0 \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Otro ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}} \quad \to \text{Recuerda} \quad \frac{1}{\infty}=0 \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Si aparecen raíces, debemos tener en cuenta el grado de la raíz para saber el grado de la variable x por el que debemos dividir cada término. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \text{Indeterminación}$$

El grado máximo es $x^{\frac{4}{2}} = x^2$,que dentro de la raíz entra como x^4 .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}-\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} = \frac{5}{1} = 5$$

Otro ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

El grado máximo es $x^{\frac{6}{2}} = x^3$,que dentro de la raíz entra como x^6 .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^6-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^3}}{\sqrt{\frac{x^6}{x^6}-\frac{1}{x^6}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^6}}} = \frac{0}{1} = 0$$

Indeterminación $\infty - \infty$ → Si poseemos esta indeterminación al operar con funciones racionales, operamos para obtener una única fracción, para llegar a algunas de las indeterminaciones ya estudiadas anteriormente.

Veamos un ejemplo.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(4x - \frac{4x^2}{x+2}\right) = \infty - \infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \left(4x - \frac{4x^2}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+8x-4x^2}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{x+2} = 8$$

Puede ocurrir que la indeterminación $\infty - \infty$ aparezca al trabajar con raíces cuadradas. En estos casos puede ser buena idea multiplicar y dividir por el conjugado.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = \infty - \infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-x-1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)} = 0$$

Hay más tipo de indeterminaciones; que estudiaremos más adelante.

Límites en el infinito

¿Qué ocurre si deseamos estudiar el comportamiento de la función en puntos tremendamente positivos ($+\infty$) o tremendamente negativos ($-\infty$)?

Es lo que se conoce como límites en el infinito que, según casos, generan los conceptos de asíntota horizontal y asíntota oblícua (como aquellos valores a los que la gráfica se acerca indefinidamente, cada vez más, para valores en el infinito de la variable x).

La notación es la siguiente:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ → Límite de la función cuando x tiende a $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ → Límite de la función cuando x tiende a $-\infty$

No tiene sentido preguntarnos por límites laterales en el infinito (es decir, a la izquierda y derecha de $\pm\infty$). Directamente estudiamos el límite, siguiendo una serie de reglas (algunas ya son conocidas de clases anteriores, y otras iremos presentándolas conforme realicemos ejemplos más complicados).

Algunos ejemplos

Una función puede dispararse cuando x tiende a infinito, como por ejemplo la parábola $f(x)=x^2$.

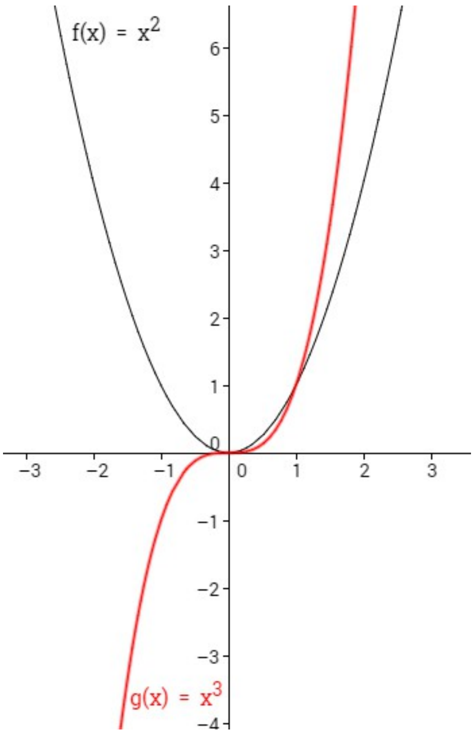
$$\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^2=+\infty$$

Ambos límites tienden a $+\infty$.

La función $g(x)=x^3$, por su parte, presenta los siguientes valores en el infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} x^3=+\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^3=-\infty$$

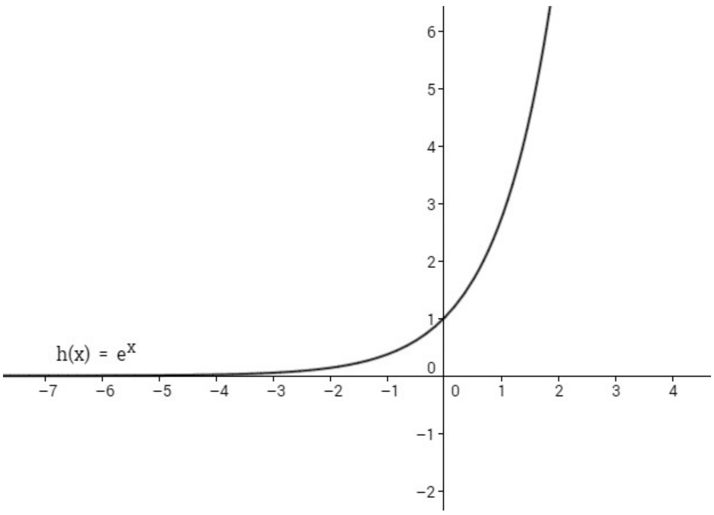
Las gráficas siguiente ratifican los resultados analíticos obtenidos.



La siguiente función $h(x)=e^x$ va a converger en valores de la x tremendamente negativos pero se dispara para valores de x tremendamente positivos.

$\lim_{x \to +\infty} e^x=+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x=0$ → Asíntota horizontal $y=0$ para valores de $x \to -\infty$



La función $i(x)=\frac{\ln(x)}{e^x}$, además de poseer una asíntota vertical en $x=0$, posee una asíntota horizontal $y=0$ para valores tremendamente positivos de x .

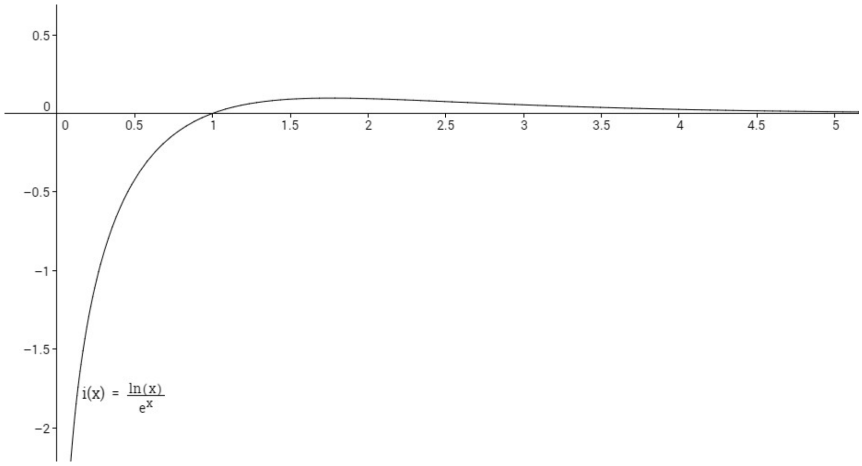
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}=0$ → Asíntota horizontal $y=0$ para valores de $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}=\nexists$

El límite $\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}=\nexists$ es un ejemplo de que una cosa significa que el límite no exista, y otra cosa bien distinta implica que el límite valga infinito. Como ya hemos repetido varias veces en este tema, es importante no confundir ambos conceptos.

En la siguiente gráfica mostramos la curva $i(x)=\frac{\ln(x)}{e^x}$, donde podrás apreciar que la asíntota horizontal $y=0$ es cortada por la función en el punto $x=1$.

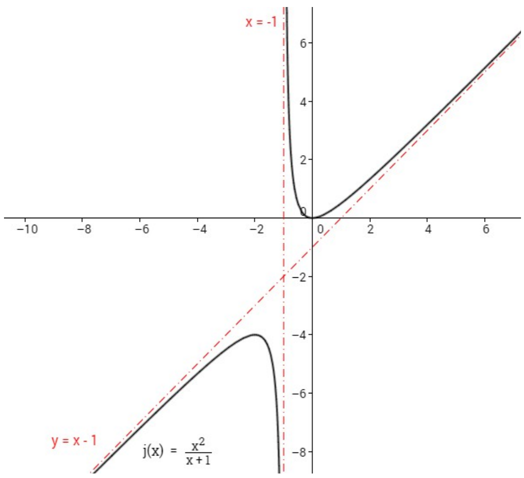
¿Cómo es posible, si es una asíntota? Porque el comportamiento de acercarse cada vez más y más a la asíntota, sin tocarla, se da para valores enormes $x \to +\infty$.



Por último presentamos un ejemplo de gráfica con asíntota oblicua con la función $j(x)=\frac{x^2}{x+1}$, que posee además una asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1}=x-1$ → Asíntota oblicua $y=x-1$ para valores $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1}=x-1$ → Asíntota oblicua $y=x-1$ para valores $x\to-\infty$



Poco a poco aprenderemos a resolver por nosotros solos, analíticamente, estos límites. ¡Paciencia, todo llegará!

Concepto de discontinuidad

Una función es discontinua en un punto $x=x_0$ cuando no es continua. ¡¡Jajaja, nos hemos partido la cabeza con esta definición!!

Ahora en serio. Si no se cumplen algunas de las tres condiciones impuestas para la continuidad de la función en un punto $x=x_0$, hablaremos de discontinuidad.

Recordemos las tres condiciones de continuidad en un punto $x=x_0$.

1. Está definida la función en el punto → $\exists f(x_0)$
2. Existen los dos límites laterales y son iguales → $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$
3. El valor de la función en el punto es igual al valor del límite en el punto → $f(x_0)=L$

Discontinuidad evitable

Sea la función $f(x)$ y el punto $x=x_0$.

Si los límites laterales existen y son iguales, pero no coincide con el valor de la función en el punto ($f(x_0)\neq L$), o bien no está definida la función en el punto ($\nexists f(x_0)$) hablaremos de **discontinuidad evitable**.

Es evitable... porque podemos evitarlo.

¿Cómo? Redefiniendo el valor de la función en $x=x_0$ y dándole el valor del límite, es decir, forzar que se cumpla la igualdad $f(x_0)=L$.

Ejemplo 1 resuelto

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} x+1 & si & x<1 \\ 0 & x=1 & \\ 2 & x>1 & \end{matrix}\right\}$ **en** $x_0=1$ **.**

Tenemos una función definida a trozos.

1. $\exists f(1)=0$
2. $\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$, $\lim_{x\to 1^+}(2)=2$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=L=2$
3. $f(1)=0\neq L=2$

Por lo tanto el valor de la función en $x_0=1$ no coincide con el valor del límite. Esta discontinuidad evitable podemos evitarla redefiniendo la función a trozos de la siguiente forma:

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x+1 & si & x<1 \\ 2 & x\geq 1 & \end{matrix}\right\}$$

Discontinuidad no evitable de primera especie

Sea la función $f(x)$ y el punto $x=x_0$.

Si los límites laterales existen pero no son iguales, hablaremos de **discontinuidad no evitable de primera especie**.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Si ambos límites laterales son finitos, diremos que la **discontinuidad de primera especie es de salto finito**.

Si al menos uno de los límites laterales es infinito, diremos que la **discontinuidad de primera especie es de salto infinito**.

Importante: No confundir el concepto de “límite infinito” con el concepto de “no existir el límite. Por ejemplo, la función $f(x)=\ln(x)$ tiene límite por la derecha en $x=0$ porque:

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ → El límite por la derecha en $x=0$ es $-\infty$

Pero no tiene límite por la izquierda en $x=0$ porque el logaritmo no está definido para valores negativos:

$\nexists \lim_{x \to 0^-} \ln(x)$ → No existe el límite por la izquierda en $x=0$

Ejemplo 2 resuelto

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} -1 & si \quad x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{matrix}\right\}$ **en** $x_0=0$ **.**

Tenemos una función definida a trozos.

1. $\exists f(0)=0$
2. $\lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} (1) = 1$ → $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Los límites laterales existen, son finitos, pero no coinciden. La discontinuidad es no evitable de primera especie de salto finito.

El valor absoluto $\left| \lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) \right| = 2$ nos da la magnitud del salto finito.

Ejemplo 3 resuelto

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ **en** $x_0=0$ **.**

1. $\nexists f(0)$ → No podemos dividir por 0

2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ → Si dividimos por un número negativo muy próximo a 0 , el cociente se hace tremendamente negativo y tiende a $-\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ → Si dividimos por un número positivo muy próximo a 0 , el cociente se hace tremendamente positivo y tiende a $+\infty$.

Al menos uno de los límites laterales se dispara a infinito (en este caso los dos). Estamos ante una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.