Derivadas parciais como taxa de variação*

*Material elaborado por Raiane Lemke,
na sua pesquisa de mestrado (em andamento).



Objetivos



- Definir a regra da cadeia;
- Resolver problemas que envolvam derivadas parciais como taxa de variação;
- Visualizar o aspecto dinâmico do conceito de derivadas parciais como taxa de variação.

Exemplo

Determine as derivadas parciais da função

$$f(x, y) = \cos(xy) \cdot \ln(x^2 + y^2).$$

Que regras de derivação foram utilizadas?

Produto, potência, cosseno, logaritmo e

regra da cadeia.

Exemplo

Reescrevendo a função f da forma

$$f(u, v) = \cos(u) \cdot \ln(v).$$

com $u(x, y) = xy$ e $v(x, y) = x^2 + y^2$, como ficariam as derivadas parciais de f em relação a x e a y?

Exemplo

Assim:

$$f_x(x,y) = -\sin(xy)y \cdot \ln(x^2+y^2) + \cos(xy)\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_x(x,y) = f_u(u,v) \cdot u_x(x,y) + f_v(u,v) \cdot v_x(x,y)$$

$$f_y(x,y) = -\sin(xy)x \cdot \ln(x^2+y^2) + \cos(xy)\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = f_u(u,v) \cdot u_y(x,y) + f_v(u,v) \cdot v_y(x,y)$$

Regra da cadeia – caso 1

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, sendo $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funções diferenciáveis de t. Então, z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{df(x,y)}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}$$

Regra da cadeia – caso 2

Suponha que $z = f(u, v)$ seja uma função diferenciável de u e v e u e v funções diferenciáveis de x e de y. Então,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

Diagrama

Exemplo

Seja $f(u, v, t)$ uma função que possui derivadas parciais, com $u = x - y, v = y - z$ e $t = z - x$. Determine $f_x + f_y + f_z$.

Taxa de Variação

- O que você entende por taxa de variação?

Suponhamos que f é uma função de duas variáveis x e y. Então, a derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ nos dá a razão instantânea de variação de f, no ponto $P(x_0, y_0)$, por unidade de variação de x. Isto é, a taxa de variação de f por unidade de x no ponto P.

Analogamente, $f_y(x_0, y_0)$ nos dá a taxa de variação de f por unidade de y.



Exemplo 1

- Sabendo que a pressão P, em quilopascals, o volume V, em litros, e a temperatura T, em kelvins, de um mol de um gás ideal estão relacionados pela fórmula $PV = 8T$, encontre a taxa de variação instantânea de V por unidade de P, quando $T = 300\,\mathrm{k}$ e $V = 100\mathrm{l}$.



Exemplo 2

- O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura decresce à taxa de 6,5 cm/s. Qual a taxa de variação do volume do cone quando seu raio é de 300 cm e a sua altura é de 350 cm? (STEWART, 2009, p.864)

Taxa de Variação

Você consegue imaginar uma situação real na qual duas grandezas variam simultaneamente com o passar do tempo?



Um exemplo dessa situação

Qual é o formato de um monte de areia**?**



Fonte: LEMKE, 2017.



Como é o processo de produção de areia?



Fonte: http://www.grupomartinslara.com.br/porto-de-areia-modelo/producao/
Acesso em: 15 fev. 2017.

Decapeamento

- A extração de areia é feita em cava e para isso é necessário utilizar uma escavadeira para fazer um buraco e retirar a primeira "capa" para poder chegar até onde o mineral está.
- Esse processo irá formar uma lagoa e nela será colocada a draga para sucção da areia. Esse processo de escavação é chamado de decapeamento.



Dragagem

- Após feito o decapeamento e depois de formado a lagoa, é colocado um barco chamado de draga para fazer a sucção de areia como se fosse um canudo.





Classificação

- A areia que foi sugada pela draga é levada por tubulações até um equipamento que lembra uma torre, chamado de **classificador**. Dentro dele tem várias peneiras que vibram e separam os diferentes tipos de areia de acordo com a granulometria. Cada tipo de areia é levada também por tubulações até o monte de estocagem.





Fonte: http://www.engmine.com.br/classificacao-de-areia?lightbox=dataItem-ija8thk71 Acesso em: 15 fev. 2017.

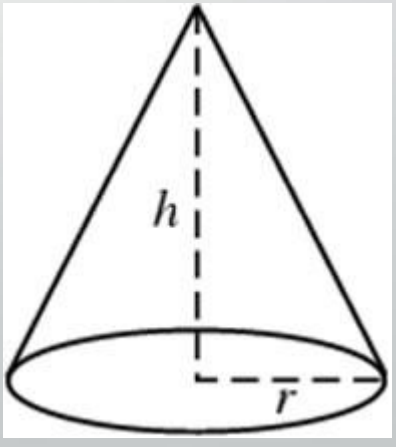
Carregamento

- Por fim, a areia é estocada em montes e carregada por uma carregadeira nos caminhões.



- Uma das etapas do processo de produção de areia é quando a areia passa pelo classificador (conforme podemos observar nas figuras anteriores) e é despejada em montes cônicos, não são exatamente cones circulares retos, mas se assemelham muito.







Situação problema

- Supondo que no instante $t = 0$ s, um monte cônico de areia tem 2 m de raio e 3 m de altura. A taxa de aumento da altura desse cone nesse instante é de 0.1 m/s e o raio aumenta a uma taxa de 0.05 m/s. Determine:

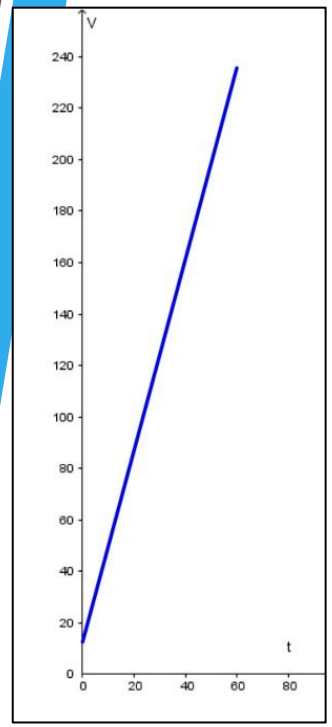
a) A taxa de variação do volume deste cone no instante t = 0 s.

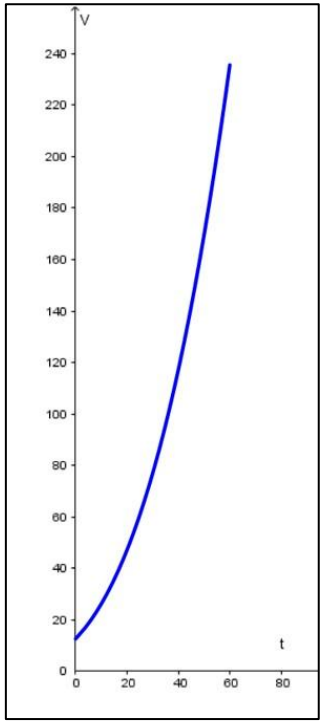
b) A taxa de variação do volume deste cone no instante $t = 20$ s?

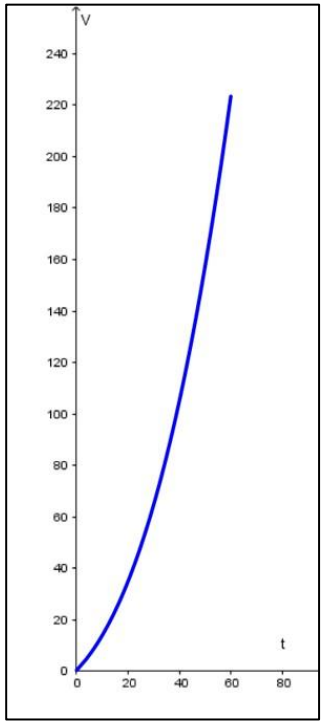


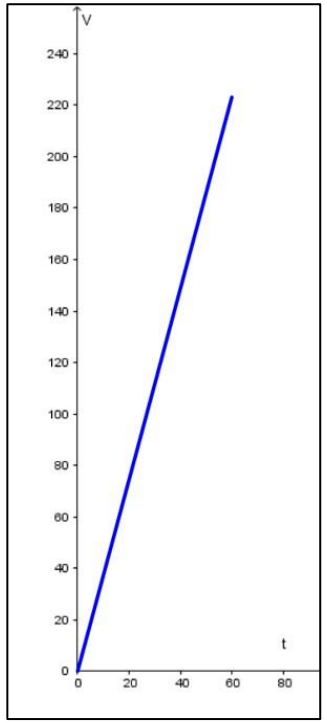
Trabalho

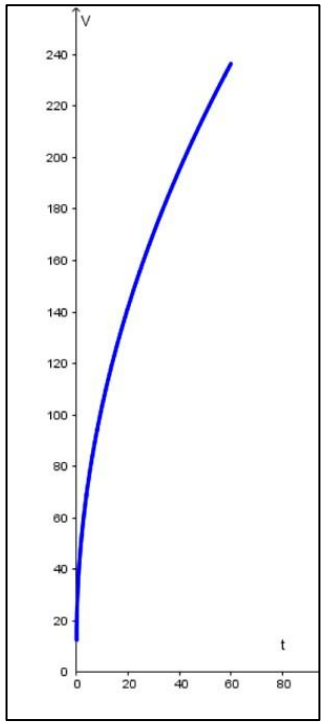
1 - Determine qual gráfico representa melhor a variação do volume da areia em relação ao tempo: ambiente lápis-papel.

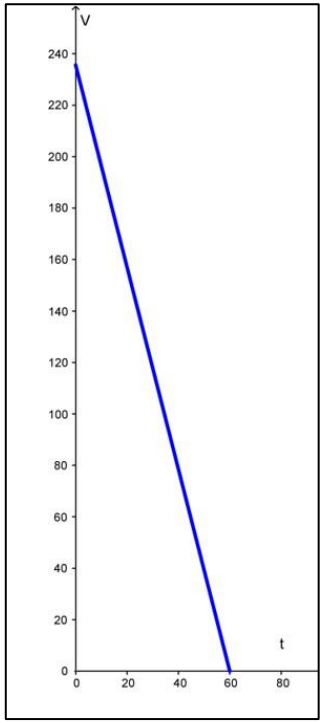

V
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


V
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


V
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


V
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


V
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240


V
t
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240

Trabalho

2 - Determine qual gráfico representa melhor a variação do volume da areia em relação ao tempo: ambiente computacional (confronto).

Objeto de aprendizagem:

"Monte cônico"

Disponível em: https://ggbm.at/F8H6Xx7N

Monte cônico

▸Entre com os dados do problema:

h 3 r 2

dh/dt 0.1 dr/dt 0.05

Resolução

$$V(t) = \frac{\pi\, r^2(t) h(t)}{3}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}(r(t), h(t))\frac{dr(t)}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}(r(t), h(t))\frac{dh(t)}{dt}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{2\pi r(t)h(t)}{3}\frac{dr(t)}{dt} + \frac{\pi r^2(t)}{3}\frac{dh(t)}{dt}$$

Para $t = 0\ s\ tem - se$:

$$r(t) = r_0 + (dr/dt)(t) \qquad h(t) = h_0 + (dh/dt)(t)$$

$$r(0) = 2 + (0.05)(0) \qquad h(0) = 3 + (0.1)(0)$$

$$\frac{dV(0)}{dt} = \frac{2\pi.(2)(3)}{3}(0.05) + \frac{\pi(2)^2}{3}(0.1)$$

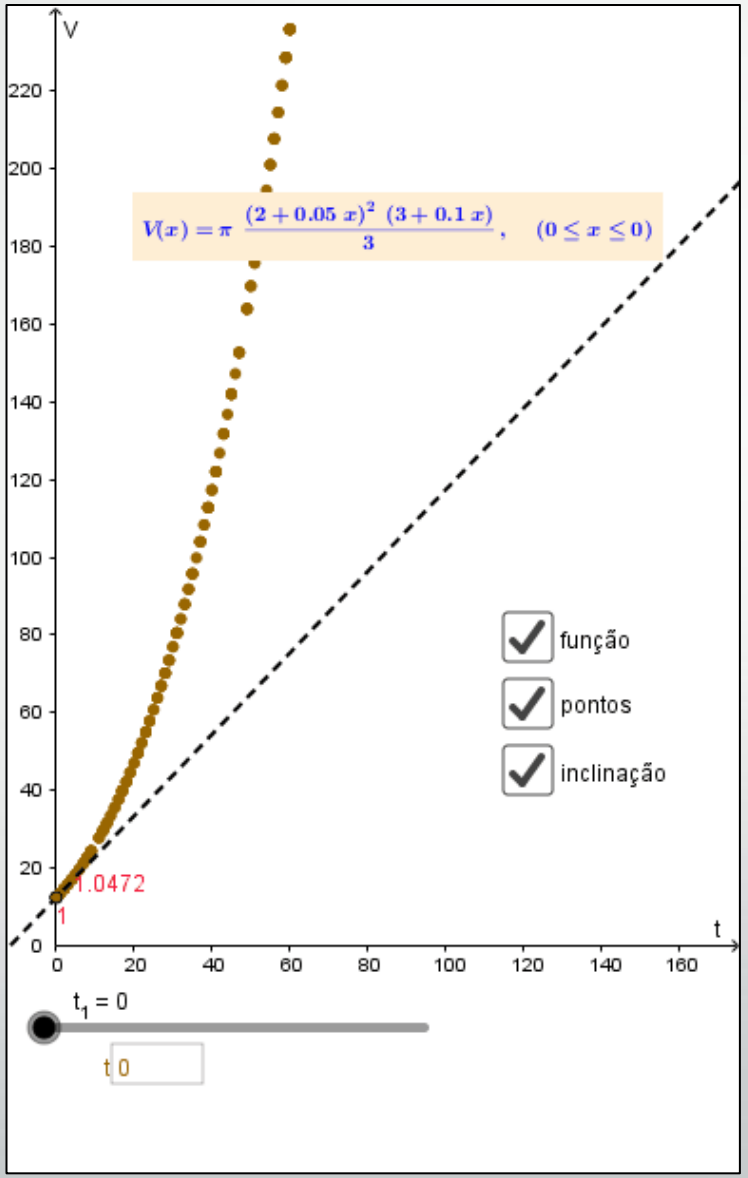
$$\frac{dV(0)}{dt} = 1.0472\ m^3/s$$

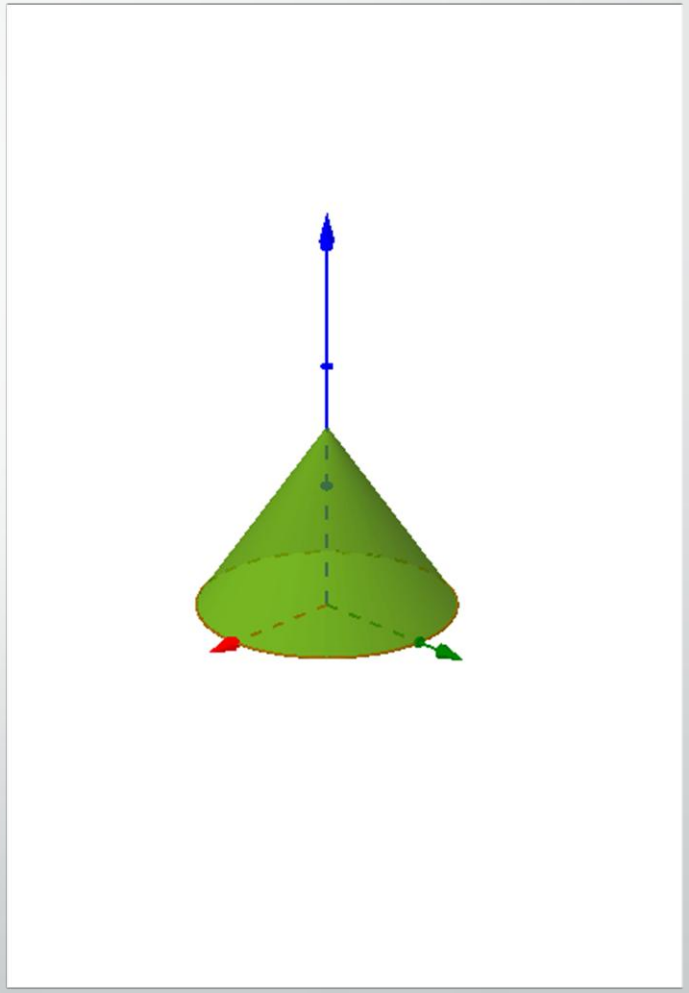
Cone original $V_1 : 12.56637\ m^3$

Nova altura $= 3\ m$ *Novo raio* $= 2\ m$

$V_2 = 12.56637\ m^3$

$\Delta V = V_2 - V_1 = 0$





Solução

$$V(t) = \frac{\pi r^2(t) h(t)}{3}$$

$$r(t) = r_0 + \frac{dr}{dt}t \qquad h(t) = h_0 + \frac{dh}{dt}t$$

$$r(t) = 2 + 0.05t \qquad h(t) = 3 + 0.1t$$

$$V(t) = \frac{\pi(2 + 0.05t)^2(3 + 0.1t)}{3}, t \in [0, 60]$$

Trabalho

3 - Imagine que num dado instante, um monte cônico de areia tem 2 m de raio e 3 m de altura. Sabendo que a taxa de aumento do raio desse cone nesse instante é de 0.05 m/s e a **altura não varia**, como será o gráfico que representa a variação do volume da areia em relação ao tempo?

4 - Imagine que num dado instante, um monte cônico de areia tem 2 m de raio e 3 m de altura. Sabendo que a taxa de aumento da altura desse cone nesse instante é de 0.1 m/s e o **raio não varia**, como será o gráfico que representa melhor a variação do volume da areia em relação ao tempo?

5 – Na situação do monte cônico o que representam dr/dt , dh/dt e dV/dt? Quais variáveis mais influenciam a variação do volume do cone? Justifique.

Derivadas parciais como taxa de variação - cone

- No GeoGebraBook: https://ggbm.at/thryzyZ8



Obrigada!

