



6

Wirtschaftliche Verflechtungsprozesse

Didaktische Hinweise

Die folgende Station stellt einen Lernpfad vor, bei dem sich die Schülerinnen und Schüler selbständig und ohne Kenntnisse der Matrizenrechnung vorausgesetzt am Beispiel einer wirtschaftlichen Verflechtung mit der Darstellung mehrstufiger Prozesse auseinandersetzen. Dabei erarbeiten sie die Bedeutung einer kompakten Formulierung durch Matrizen. Gleichzeitig erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass Sie in der Lage sind Rechnungen zu relevanten Fragestellungen z.B. Bedarfsermittlung, Kostenermittlung, Preiskalkulation mit Ihnen bekannten Mitteln zu berechnen. Darauf aufbauend kann anschließend die Matrixdarstellung, das Rechnen mit Matrizen bis hin zum Lösen von Gleichungssystemen formalisiert werden.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... erkennen anhand des Sachverhaltes die Relevanz der Fragestellung.
- ... wenden unterschiedliche Darstellungen zur Strukturierung des Sachverhaltes an.
- ... diskutieren unterschiedliche Formen der Darstellung.
- ... wechseln zwischen den Darstellungsformen Text, Graph, Tabelle und Matrix
- ... erarbeiten am Beispiel die Grundlagen für das Rechnen mit Matrizen

Ablauf

- Zunächst bearbeiten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 1. Die Ergebnisse werden präsentiert und die Übersichtlichkeit der Darstellungen diskutiert.
- Danach bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in Gruppen die Aufgabe 2 ohne Kenntnisse von Matrizen. Sie können die Fragen 1 - 11 ohne zusätzliche Hilfen beantworten. Zu Frage 12 wird der Tipp gegeben, es mit „Probieren“ zu versuchen.
- Erst wenn alle Fragen (bis auf 12) beantwortet sind, beginnt die Arbeit mit den Lernpfadkarten. Die Gruppen bearbeiten die Karten in der Reihenfolge der Nummerierung.
Jede Gruppe erhält zwei 2 Exemplare jeder Karte.

Übersicht der Materialien

- 2 Aufgabenblätter mit Lösungen
- Arbeitsauftrag für die Gruppenarbeit mit den Lernkarten.
- 18 Lernkarten



Schülerarbeitsblatt 1

Aufgabe 1

Der Möbelhersteller AKEI bietet ein praktisches Regalsystem an. Aus Pfosten, Böden und Türen lassen sich verschiedene Modelle zusammenbauen. Für Modell Artus werden 8 Pfosten, 12 Böden und 4 Türen gebraucht, für Modell Bodo nur 6 Pfosten und 6 Böden. Luxusmodell Cosimo besteht aus 10 Pfosten, 16 Böden und 6 Türen.

Ein Boden wird aus 2 kg Holz und 0,4 kg Kunststoff gefertigt, ein Pfosten aus 3 kg Holz, 0,3 kg Kunststoff und 0,2 kg Metall. In einer Tür sind 1,5 kg Holz, 0,5 kg Kunststoff und 0,1 kg Metall verarbeitet.

- Stellen Sie den obigen Sachverhalt übersichtlich dar.
- Welche Mengen an Holz, Kunststoff und Metall braucht der Möbelhersteller AKEI für jeweils ein Regal?

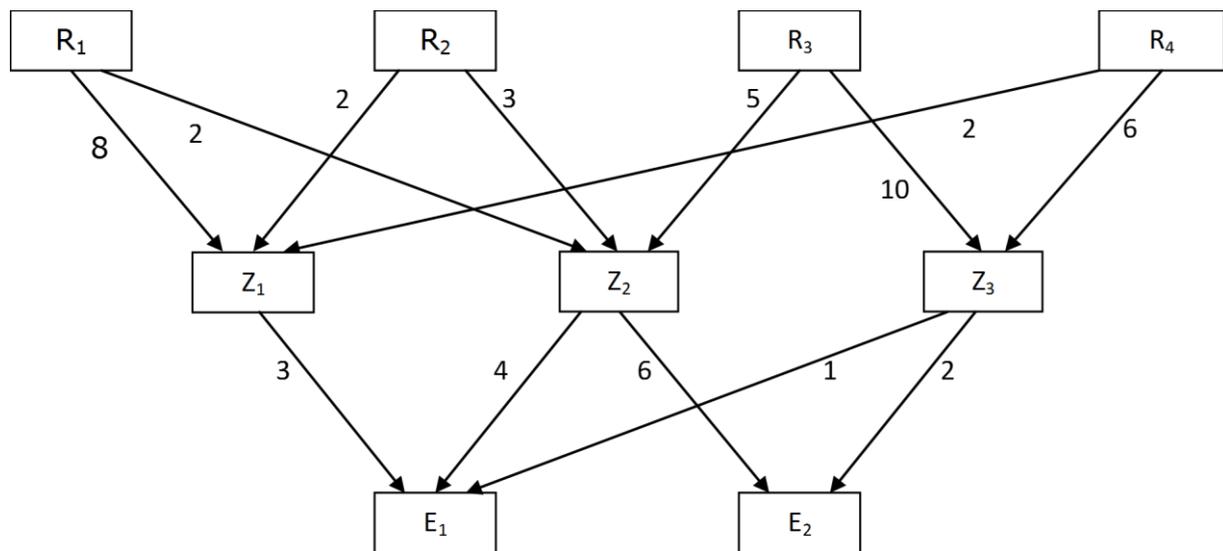


Schülerarbeitsblatt 2

Aufgabe 2 (Teil 1)

Eine Fertigungsanlage verarbeitet in einer ersten Stufe die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3 . In einer zweiten Stufe werden aus den drei Zwischenprodukten die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt.

Folgendes Schaubild zeigt, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Rohstoffe für eine ME eines Zwischenproduktes und wie viele ME der Zwischenprodukte für eine ME eines Endproduktes benötigt werden.



1. Tragen Sie in die Tabelle ein, wie viele Rohstoffe von jeder Sorte für jeweils eine ME eines Zwischenproduktes benötigt werden.
Wie viele ME von den einzelnen Rohstoffen werden benötigt?

	Z ₁	Z ₂	Z ₃
R ₁			
R ₂			
R ₃			
R ₄			

2. Tragen Sie in die Tabelle ein, wie viele Zwischenprodukte von jeder Sorte für jeweils eine ME eines Endproduktes benötigt werden.
Wie viele ME von den einzelnen Zwischenprodukten werden benötigt?

	E ₁	E ₂
Z ₁		
Z ₂		
Z ₃		

3. Tragen Sie in die Tabelle ein, wie viele Rohstoffe von jeder Sorte für jeweils eine ME eines Endproduktes benötigt werden.
Wie viele ME von den einzelnen Rohstoffen werden benötigt?

	E ₁	E ₂
R ₁		
R ₂		
R ₃		
R ₄		



Schülerarbeitsblatt 3

Aufgabe 2 (Teil 2)

4. Drei Kunden A, B und C werden mit den Endprodukten beliefert.

Im ersten Quartal erhalten sie
(Angaben in ME):

	Kunde A	Kunde B	Kunde C
E ₁	100	310	8
E ₂	150	240	18

Im zweiten Quartal erhalten sie:

	Kunde A	Kunde B	Kunde C
E ₁	300	420	52
E ₂	120	210	58

Wie viele ME je Endprodukte werden nach einem halben Jahr an die jeweiligen Kunden geliefert?

5. Der Betrieb hat für seine beiden Kundengruppe unterschiedliche Preise in Geldeinheiten (GE):

	Preise für Großhändler	Preise für Einzelhändler
E ₁	1200	1400
E ₂	1440	1600

Tragen Sie in die Tabelle die neuen Preise nach einer Erhöhung um 25 % ein,

	Preise für Großhändler	Preise für Einzelhändler
E ₁		
E ₂		

6. Ein neuer Kunde bestellt 400 ME von E₁ und 240 ME von E₂.

Wie viele Rohstoffe braucht der Betrieb jeweils um diesen Auftrag ausführen zu können?

Wie viele Zwischenprodukte braucht der Betrieb jeweils für diese Produktionsmenge?

7. Der Betrieb verkauft nach der Preiserhöhung 400 ME von E₁ und 240 ME von E₂ an einen Großhändler. Wie groß ist sein Erlös?

8. Wie hoch ist der Gewinn, wenn die Kosten 1.000.000 GE betragen?

9. Das für die Produktion benötigte Material (Rohstoffe) wird von einer Zulieferfirma zu folgenden Preisen bezogen:

	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
Einkaufspreis in GE je ME	10	15	20	12

Wie hoch sind für jedes einzelne Endprodukt die Materialkosten je ME ?



Schülerarbeitsblatt 4

Aufgabe 2 (Teil 3)

10. Bei der Weiterverarbeitung der Rohstoffe zu den Zwischenprodukten entstehen weitere Kosten:
(diese Weiterverarbeitungskosten sind Fertigungskosten der Stufe 1)

	Z ₁	Z ₂	Z ₃
Fertigungskosten in Stufe 1 in GE je ME	2	4	3

Bei der Weiterverarbeitung der Zwischenprodukten zu den Endprodukten entstehen weitere Kosten: (diese Weiterverarbeitungskosten sind Fertigungskosten der Stufe 2)

	E ₁	E ₂
Fertigungskosten in Stufe 2 in GE je ME	5	7

Berechnen Sie die Kosten, die für 1 ME eines Endproduktes insgesamt anfallen.
(Variable Herstellkosten je ME der Endprodukte).

11. Wie hoch sind die Produktionskosten für 400 ME von E₁ und 240 ME von E₂, wenn zusätzlich noch fixe Kosten in Höhe von 77360 GE anfallen?
12. Nach Auslieferung der produzierten Waren sind im Lager immer noch 1440 ME von R₁ und 1260 ME von R₂.
Wie viele Endprodukte lassen sich damit herstellen?
Wie viel von R₃ und R₄ wird für diese Produktion benötigt?



Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

- Stellen Sie den obigen Sachverhalt übersichtlich dar.

z.B. Tabelle

	Artus	Bodo	Cosimo
Pfosten	8	6	10
Böden	12	6	16
Türen	4	0	6

	Pfosten	Böden	Türen
Holz	3	2	1,5
Kunststoff	0,3	0,4	0,5
Metall	0,2	0	0,1

Graphik



- Welche Mengen an Holz, Kunststoff und Metall braucht der Möbelhersteller AKEI für jeweils ein Regal?

155 kg Holz, 25,8 kg Kunststoff und 5,8 kg Metall



Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

1 Rohstoff- Zwischenprodukt-Matrix $A_{(4,3)}$.

	Z ₁	Z ₂	Z ₃
R ₁	8	2	0
R ₂	2	3	0
R ₃	0	5	10
R ₄	2	0	6

2 Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B_{(3,2)}$.

	E ₁	E ₂
Z ₁	3	0
Z ₂	4	6
Z ₃	1	2

3 Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{(4,2)}$
Matrizenmultiplikation $C = A \cdot B$

	E ₁	E ₂
R ₁	32	12
R ₂	18	18
R ₃	30	50
R ₄	12	12

4 Addition von Matrizen

Im ersten Quartal erhalten sie
(Angaben in ME):

Matrix Q_1

	Kunde A	Kunde B	Kunde C
E ₁	100	310	8
E ₂	150	240	18

Im zweiten Quartal erhalten sie:

Matrix Q_2

	Kunde A	Kunde B	Kunde C
E ₁	300	420	52
E ₂	120	210	58

Im ersten Halbjahr erhalten Sie

Matrix $H_1 = Q_1 + Q_2$

	Kunde A	Kunde B	Kunde C
E ₁	400	730	60
E ₂	270	450	76

5 Der Betrieb hat für seine beiden Kunden-
gruppen unterschiedliche Preise in Geld-
einheiten (GE):

Matrix P_1

	Preise für Großhändler	Preise für Einzelhändler
E ₁	1200	1400
E ₂	1440	1600

Erhöhte Preise $P_2 = 1,25 \cdot P_1$
Skalar-Multiplikation

	Preise für Großhändler	Preise für Einzelhändler
E ₁	1500	1750
E ₂	1800	2000



6 Ein neuer Kunde bestellt 400 ME von E₁ und 240 ME von E₂.

Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 400 \\ 240 \end{pmatrix}$

Rohstoffbedarf $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 15680 \\ 11520 \\ 24000 \\ 7680 \end{pmatrix}$

Bedarf an Zwischenprodukten $\vec{z} = B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 3040 \\ 880 \end{pmatrix}$

7 Erlös = (1500 1800) · $\begin{pmatrix} 400 \\ 240 \end{pmatrix}$ = 1032000

8 Gewinn = Erlös - Kosten G = 1032000 - 1000000 = 32000

9 Das für die Produktion benötigte Material (Rohstoffe) wird von einer Zulieferfirma zu folgenden Preisen bezogen:

	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
Einkaufspreis in GE je ME	10	15	20	12

Rohstoffkostenvektor $\vec{k}_R^T = (10 \ 15 \ 20 \ 12)$

Materialkosten je ME der Endprodukte: $\vec{k}_{RE}^T = \vec{k}_R^T \cdot C = (1334 \ 1534)$

10 Fertigungskosten der Stufe 1: $\vec{k}_Z^T = (2 \ 4 \ 3)$

Fertigungskosten je ME der Endprodukte in Stufe 1: $\vec{k}_{ZE}^T = \vec{k}_Z^T \cdot B = (25 \ 30)$

Fertigungskosten der Stufe 2: $\vec{k}_E^T = (5 \ 7)$

Variable Herstellkosten Kosten je ME der Endprodukte

$\vec{k}_V^T = \vec{k}_{RE}^T + \vec{k}_{ZE}^T + \vec{k}_E^T = \vec{k}_R^T \cdot C + \vec{k}_Z^T \cdot B + \vec{k}_E^T = (1364 \ 1571)$

11 Produktionskosten für 400 ME von E₁ und 240 ME von E₂.

$K = \vec{k}_V^T \cdot \vec{p} + K_f = 922640 + 77360 = 1000000$

oder: $K_R = \vec{k}_R^T \cdot \vec{r}$ $K_Z = \vec{k}_Z^T \cdot \vec{z}$ $K_E = \vec{k}_E^T \cdot \vec{p}$ und $K = K_R + K_Z + K_E + K_f$

12 Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1440 \\ 1260 \\ u \\ v \end{pmatrix}$

$32x + 12y = 1440 \wedge 18x + 18y = 1260 \Leftrightarrow x = 30 \ y = 40$

$C \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1440 \\ 1260 \\ 2900 \\ 840 \end{pmatrix}$

2900 ME von R₃ und 840 ME von R₄ werden gebraucht.