3.3 ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μήκος κύκλου ακτίνας ρ : Το μήκος L ενός κύκλου δίνεται από τον τύπο

$$L = 2\pi\rho \quad \text{ή} \quad L = \pi\delta$$

όπου δ η διάμετρος του κύκλου και π ένας άρρητος αριθμός του οποίου προσέγγιση με δύο δεκαδικά είναι η $\pi = 3{,}14$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Εύρεση μήκους ενός κύκλου : Για να βρω το μήκος ενός κύκλου βρίσκω την ακτίνα του κύκλου και εφαρμόζω τον τύπο

2.

Πράξεις και π : Στους υπολογισμούς, αντικαθιστάμε τον αριθμό π με την προσέγγιση 3,14.
Πολλές φορές δεν κάνουμε την αντικατάσταση και βρίσκουμε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του π

3.

Κύλιση τροχού : Ένας κυκλικός τροχός, σε μία πλήρη περιστροφή του, διανύει απόσταση ίση με το μήκος του κύκλου του τροχού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Μήκος κύκλου	100,48cm	314cm	37,68cm	43,96cm
Διάμετρος	32cm	50cm	12cm	14cm
Ακτίνα	16cm	100cm	24cm	7cm

Θεωρία 1

Προτεινόμενη λύση

1η Στήλη : Από τον τύπο $L= 2\pi\rho$ για $\rho = 16$ και $\pi = 3,14$ βρίσκουμε

$$L = 2{\cdot}3,14{\cdot}16 = 100,48 \text{ cm}$$

Προφανώς $\delta = 32$ cm

2η Στήλη : $L = 2\pi\rho$ άρα $314 = 2{\cdot}3,14{\cdot}\rho$ οπότε

$$\rho = \frac{314}{2\cdot 3,14} = 50 \text{ cm}$$

Προφανώς $\delta = 100$ cm

3η Στήλη : $L = \pi\delta = 3,14{\cdot}12 = 37,68$cm και προφανώς $\rho = 24$

4η Στήλη : $L = 2{\cdot}3,14{\cdot}7 = 43,96$ cm και $\delta = 14$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

2.

Το μήκος ενός κύκλου είναι 94,2 cm. Να βρείτε την περίμετρο ενός ορθογωνίου του οποίου η μικρότερη διάσταση είναι όση η ακτίνα του κύκλου και η μεγάλη κατά 3 cm μεγαλύτερη .

Προτεινόμενη λύση

$L = 2\pi\rho$ άρα $94,2 = 2{\cdot}3,14{\cdot}\rho$ οπότε $\rho = \dfrac{94,2}{2\cdot 3,14} = 15$ cm

Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $\alpha = 15$ και $\beta = 18$.

Συνεπώς η περίμετρος του $\Pi = 2{\cdot}15 + 2{\cdot}18 = 30 + 36 = 66$ cm

3.

Η διάμετρος ενός κύκλου είναι 12,56 cm. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου με περίμετρο ίση με το μήκος του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

$L = \pi\delta = 3,14{\cdot}12,56 = 39,4384$cm

Αν α είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε $\alpha = \dfrac{39,4384}{4} = 9,8596$ cm

4.

Ένας τροχός έχει διάμετρο 24 cm. Πόσες στροφές θα κάνει αν διανύσει διάστημα 3768 m.

Σχόλιο 3

Προτεινόμενη λύση

Σε μία στροφή ο τροχός διανύει διάστημα $L = \pi\delta = 3{,}14 \cdot 24 = 75{,}36cm$

Επειδή $3768m = 3768 \cdot 100cm = 376800cm$, για να διανύσει το διάστημα των 3768m θα κάνει $376800 : 75{,}36 = 5000$ στροφές

5.

Τα μήκη δύο κύκλων έχουν διαφορά 251,2cm. Να βρείτε τη διαφορά των ακτίνων τους.

Προτεινόμενη λύση

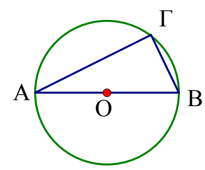
Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι δύο ακτίνες με $\rho_1 > \rho_2$, τότε $L_1 - L_2 = 251{,}2$

$$2\pi\rho_1 - 2\pi\rho_2 = 251{,}2$$
$$2 \cdot 3{,}14\,\rho_1 - 2 \cdot 3{,}14\rho_2 = 251{,}2$$
$$6{,}28\rho_1 - 6{,}28\rho_2 = 251{,}2$$
$$6{,}28(\rho_1 - \rho_2) = 251{,}2$$
$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{251{,}2}{6{,}28} = 40cm$$

6.

Με διάμετρο ΑΒ γράφουμε κύκλο. Αν ΑΓ = 12cm και ΓΒ = 5cm είναι δύο χορδές του κύκλου να βρεθεί το μήκος του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος, η γωνία $A\hat{\Gamma}B = 90^o$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 =$
$= 12^2 + 5^2 = 144 + 25 =$
$= 169$

Επομένως $AB = \sqrt{169} = 13$ cm

Το μήκος του κύκλου είναι ίσο με $L = \pi\delta = 3{,}14 \cdot 13 = 40{,}82$ cm

7.

Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν διαφορά ακτίνων 2,5 cm. Αν το μήκος του μικρότερου κύκλου είναι 9,42 cm, να βρεθεί το μήκος του μεγαλύτερου.

Προτεινόμενη λύση

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι δύο ακτίνες με $\rho_1 > \rho_2$ τότε $\rho_1 - \rho_2 = 2{,}5$ οπότε

$$2\pi\rho_1 - 2\pi\rho_2 = 2\pi \cdot 2{,}5$$
$$L_1 - L_2 = 5 \cdot 3{,}14$$
$$L_1 - 9{,}42 = 15{,}7$$
$$L_1 = 15{,}7 + 9{,}42 = 25{,}12 \text{ cm}$$

8.

Ένα κινητό κινείται σε κύκλο διαμέτρου 70 cm με ταχύτητα 109,9 km/ h . Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες ;

Σχόλιο 3

Προτεινόμενη λύση

Σε μία στροφή το κινητό διανύει διάστημα $L = \pi\delta = 3{,}14\cdot 70 = 219{,}8$cm

Σε 3 ώρες το κινητό θα έχει διανύσει διάστημα $3\cdot 109{,}9$ km $= 329{,}7\cdot 100000$cm =
= 32970000 cm

Για να διανύσει το διάστημα αυτό, θα κάνει 32970000 : 219,8 = 150000 στροφές

9.

Οι τροχοί ενός αυτοκινήτου έχουν ακτίνα 34cm και έκαναν 3500 στροφές. Πόση απόσταση διάνυσε το αυτοκίνητο;

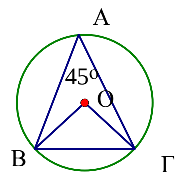
Προτεινόμενη λύση

Σε μια στροφή ο κάθε τροχός διανύει διάστημα $L = 2\pi\rho =$
$= 2\cdot 3{,}14\cdot 34 =$
$= 213{,}52$ cm

Οπότε σε 3500 στροφές διάνυσε διάστημα $3500\cdot 213{,}52 = 747320$ cm =
= 747320: 100000 =
= 7,4732 km

10.

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος του κύκλου, αν $ΒΓ = 3\sqrt{2}$



Προτεινόμενη λύση

Η γωνία $Β\hat{Ο}Γ$, ως αντίστοιχη επίκεντρη της εγγεγραμμένης των 45^o, θα είναι 90^o.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε

$ΒΟ^2 + ΟΓ^2 = ΒΓ^2$ άρα $\rho^2 + \rho^2 = (3\sqrt{2})^2$
$2\rho^2 = 18$
$\rho^2 = 9$
$\rho = 3$

Το μήκος του κύκλου είναι $L = 2\pi\rho = 2\cdot 3{,}14\cdot 3 = 18{,}84$

11.

Δύο γρανάζια έχουν ακτίνες 40 cm και 70cm και συνδέονται μεταξύ τους. Όταν το μικρότερης ακτίνας γρανάζι κάνει 1400 στροφές, πόσες στροφές κάνει το άλλο ;

Προτεινόμενη λύση

Είναι φανερό ότι τα δύο γρανάζια κατά την διάρκεια της περιστροφής τους έχουν διανύσει το ίδιο μήκος.

Το μικρότερης ακτίνας γρανάζι σε μία στροφή διανύει διάστημα $L_1 = 2\pi\rho_1 =$
$= 2\cdot 3,14 \cdot 40 =$
$= 251,2$ cm

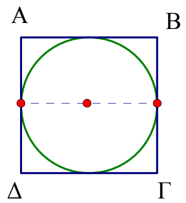
Οπότε σε 1400 στροφές διάνυσε διάστημα $251,2\cdot 1400 = 351680$ cm

Το μεγαλύτερης ακτίνας γρανάζι σε μία στροφή διανύει διάστημα $L_2 = 2\pi\rho_2 =$
$= 2\cdot 3,14 \cdot 70 =$
$= 439,6$ cm

Επομένως το διάστημα των 351680 cm το διάνυσε σε $351680 : 439,6 = 800$ στροφές

12.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με εμβαδόν 100 cm^2. Να βρείτε πόσο διαφέρει το μήκος του κύκλου από την περίμετρο του τετραγώνου.



Προτεινόμενη λύση

Έστω α η πλευρά του τετραγώνου.

Ε = 100 άρα $\alpha^2 = 100$ οπότε α = 10 cm και επομένως η περίμετρος του τετραγώνου είναι Π = 40 cm.

Η ακτίνα του κύκλου είναι ρ = 5 cm, επομένως το μήκος του κύκλου είναι

$L = 2\pi\rho = 2\cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4$ cm

Οπότε $\Pi - L = 40 - 31,4 = 8,6$ cm

13.

Ένας δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από την γη με ακτίνα 9300 km. Ο δορυφόρος εκτελεί μία πλήρη στροφή γύρω από την γη σε 2,5 ώρες . Να βρείτε την ταχύτητα του δορυφόρου.

Προτεινόμενη λύση

Το διάστημα που διανύει ο δορυφόρος σε μία στροφή είναι $L = 2\pi\rho =$
$= 2\cdot 3,14 \cdot 9300 =$
$= 58404$ km

Από τη φυσική ξέρουμε ότι $L = \upsilon t$, όπου υ η ταχύτητα του δορυφόρου και t ο χρόνος.

Οπότε $58404 = 2,5\upsilon$ άρα $\upsilon = 58404 : 2,5 = 23361,6$ km / h

14.

Σε μία ευθεία θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β , Γ και Δ . Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των μηκών των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ , ΒΓ και ΓΔ είναι ίσο με το μήκος του κύκλου με διάμετρο το ΑΔ.

Προτεινόμενη λύση

Το μήκος του κύκλου με διάμετρο το ΑΒ είναι $L_{AB} = \pi AB$

Ομοίως $L_{B\Gamma} = \pi B\Gamma$ και $L_{\Gamma\Delta} = \pi \Gamma\Delta$

Το άθροισμα των μηκών των τριών κύκλων είναι

$L_{AB} + L_{B\Gamma} + L_{\Gamma\Delta} = \pi AB + \pi B\Gamma + \pi\Gamma\Delta = \pi(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta) = \pi A\Delta$

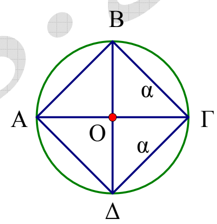
Όμως $\pi A\Delta$ είναι το μήκος του κύκλου με διάμετρο το ΑΔ.

Οπότε πράγματι $L_{AB} + L_{B\Gamma} + L_{\Gamma\Delta} = L_{A\Delta}$

15.

Να βρείτε το μήκος ενός κύκλου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς $\alpha = 3\sqrt{2}$

Προτεινόμενη λύση



Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η διαγώνιος ΒΔ του τετραγώνου είναι διάμετρος του κύκλου.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ παίρνουμε $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$ άρα

$$B\Delta^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$$

$$B\Delta^2 = 18 + 18 = 36 \quad \text{οπότε } B\Delta = \sqrt{36} = 6$$

Το μήκος L του κύκλου είναι ίσο με $L = \pi B\Delta = 3{,}14 \cdot 6 = 18{,}84$