Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 2 - existencia de inversa de una matriz en función del valor de su determinante

1. Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ **. Calcular el rango de** A **en función del parámetro real** a **.**

Calculamos el determinante de la matriz.

$$|A|=-a(a^2-1)-(2a)=-a^3-a$$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3-a=0 \rightarrow -a(a^2+1)=0 \rightarrow a=0$$

Discusión de casos.

$Si \quad a\neq 0 \rightarrow rango(A)=3$ → admite inversa

$Si \quad a=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \rightarrow$ Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → $rango(A)=2$ → no admite inversa

2. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales, tal que $A^2=I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3). Prueba que la matriz A tiene inversa y dé dicha inversa

Una matriz A tiene inversa A^{-1} , y esta es única, si se cumplen las siguientes relaciones:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$$

Se demuestra la existencia de la matriz inversa A^{-1} si el determinante de A es no nulo. Y de las condiciones del enunciado:

$$A^2=I \quad \rightarrow \quad A\cdot A=I \quad \rightarrow \quad |A\cdot A|=|I|$$

El determinante del producto es el producto de los determinantes. Y el determinante de la matriz identidad es igual a la unidad

$$|A\cdot A|=|I| \quad \rightarrow \quad |A|\cdot|A|=1 \quad \rightarrow \quad (|A|)^2=1 \quad \rightarrow \quad |A|=\pm 1\neq 0$$

Al ser el determinante no nulo, se demuestra la existencia de la matriz inversa A^{-1} y su valor es $A^{-1}=A$ ya que la propia matriz A cumple $A\cdot A=I$.

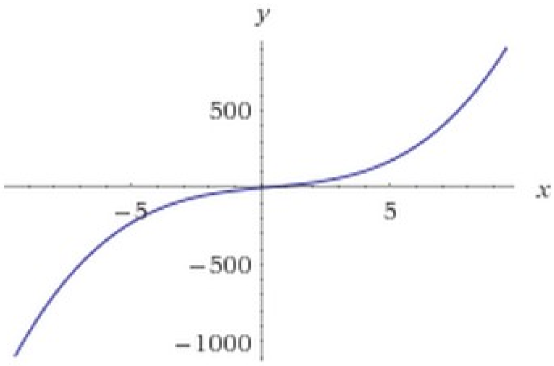
3. Determina, aplicando determinantes, para qué valores de a no existe inversa.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & a & 3\\ 4 & 1 & -a\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ a & 1 & a\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}4 & a & 4\\ 0 & a & 3\\ a & a & 1\end{pmatrix}$

a) $|A|=-a^2+12a-a-(-4a+3-a^3)=a^3-a^2+15a-3$

Para que no exista inversa → $|A|=0 \ \rightarrow \ a^3-a^2+15a-3=0$

Cuyas soluciones no son obvias de obtener por Ruffini. Podemos aplicar Bolzano para obtener un intervalo que contenga a las soluciones (que serán tres como máximo, al ser polinomio de grado tres), o bien estimar las soluciones con un programa de representación gráfica.



Solución aproximada: $a\simeq 0.2$

b) $|B|=-1+0-a-(-4+a)=3-2a$

$|B|=0 \ \rightarrow \ a=\dfrac{3}{2}$

c) $|C|=4a+3a^2+0-(4a^2+12a+0)=-a^2-8a$

$|C|=0 \ \rightarrow \ -a^2-8a=0 \ \rightarrow \ a(a+8)=0 \ \rightarrow \ a=0 \ , \ a=-8$

4. Considera $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ **para los que la matriz** $A+\lambda I$ **no tiene inversa (** I **es la matriz identidad).**

b) Resuelve $A X=-3 X$ **. Determina, si existe, alguna solución con** $x=1$ **.**

a) Operamos matricialmente.

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2+\lambda\end{pmatrix}$$

Una matriz admite inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Por lo tanto:

$$|A+\lambda I|=(-2+\lambda)(1+\lambda)(-2+\lambda)-4(-2+\lambda)$$

Sacamos factor común e igualamos a cero.

$$(-2+\lambda)[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4]=0$$

En un producto igualado a cero, al menos uno de los términos debe anularse. Es decir:

$$(-2+\lambda)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=2$$
$$[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4]=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2-\lambda-6=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-2 \quad , \quad \lambda=3$$

En conclusión. Existe inversa siempre y cuando se cumpla que $\lambda\neq-2$, $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq 3$

b) Operamos e igualamos.

$$A X=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x-2y\\ -2x+y\\ -2z\end{pmatrix} \quad , \quad -3X=-3\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\ -3y\\ -3z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2x-2y\\ -2x+y\\ -2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\ -3y\\ -3z\end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales, por lo que obtenemos un sistema 3x3.

$$\left\{\begin{matrix} -2x-2y=-3x \\ -2x+y=-3y \\ -2z=-3z \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{De la tercera ecuación} \rightarrow \quad z=0$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \end{matrix}\right\}$$

La segunda ecuación es (-2) veces la primera, por lo que podemos obviarla.

$x-2y=0 \rightarrow \quad x=2y \rightarrow$ Una incógnita será un parámetro libre. Por ejemplo: $y=\alpha$. De esta forma, tenemos un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre. Sus infinitas soluciones son:

$$\left\{\begin{matrix} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Si} \quad \alpha=\frac{1}{2} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{solución general con} \quad x=1$$

5. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

a) Estudia, en función de los valores reales de k **, si la matriz** $B \cdot A$ **tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para** $k=1$ **.**

b) Estudia, en función de los valores reales de k **, si la matriz** $A \cdot B$ **tiene inversa.**

a) $B \cdot A=\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

Si el determinante es distinto de cero, la matriz admite inversa. Aplicamos Sarrus:

$|B \cdot A|=k(k+2)+3=k^2+2k+3$, $|B \cdot A|=0 \rightarrow k^2+2k+3=0$ → No existe solución real → La matriz admite inversa, independientemente del valor de k .

Si $k=1 \rightarrow B \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Aplicamos método directo para obtener la inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultando un sistema 4x4.

$$\begin{Bmatrix} a-c=1 \\ b-d=0 \\ 3a+3c=0 \\ 3b+3c=1 \end{Bmatrix} \rightarrow a=1/2 \ , \ b=1/6 \ , \ c=-1/2 \ , \ d=1/6$$

b) $A \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos Sarrus para obtener el determinante:

$$|A \cdot B|=2k^2+0-3k-(-k+0+k(2k-2))=2k^2-3k+k-2k^2+2k=0$$

Como el determinante es nula, nunca existirá la inversa independientemente del valor de k .

6. Considere la igualdad $A \cdot M = B$ **, donde** $A = \begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz M?

b) ¿Para qué valores de t **es la matriz** A **invertible?**

c) Para el caso $t = -1$ **, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor.**

a) Si A es una matriz 3x3 y B es una matriz 3x2, la matriz M deberá ser 3x2.

b) Si el determinante de la matriz A es diferente de cero, la matriz admitirá inversa. Aplicamos la regla de Sarrus:

$$|A| = t^2 - 2t - 2 - (-2t + t - 2t) = t^2 + t - 2$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1 \quad , \quad t = -2$$

Por lo tanto, la matriz A es invertible si y solo si $t \neq \{-2, 1\}$

c) Para $t = -1$ existe la inversa de A → $M = A^{-1} \cdot B$

La matriz inversa de A resulta (puedes usar la web www.matrixcalc.org/es para calcularla, ya sea por Gauss-Jordan o por adjuntos):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad M = A^{-1} \cdot B \quad \rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & -7/2 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$ **? Razona la respuesta. La matriz** I_3 **es la matriz identidad de orden 3.**

b) Calcula razonadamente la matriz X **que verifica** $2X+C=A-X\cdot B$

a) $2I+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $|2I+B|=2+0+0-(1+0+0)=1\neq 0$ $\rightarrow$ Existe inversa por ser el determinante no nulo.

b) $2X+C=A-X\cdot B \rightarrow 2X+X\,B=A-C \rightarrow X\cdot 2I+X\,B=A-C \rightarrow$

$X(2I+B)=A-C$ → Aplicamos inversa de $2I+B$, ya que del apartado a) sabemos que existe.

$X=(A-C)\cdot(2I+B)^{-1}$ → usa **www.matrixcalc.org/es** para comprobar resultados:

$$(2I+B)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -10 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Considera las matrices cuadradas de orden 2 de la forma: $M=\begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$ **, con** x **e** y **números reales.**

a) Comprueba que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x **e** y **.**

b) Para $x=1$ **e** $y=-1$ **, calcule** M^{-1} **.**

a) Una matriz es invertible (admite inversa) si su determinante es distinto de cero.

$$|M|=x^2+y^2+1$$

Como los valores x e y son números reales, sus cuadrados nunca serán nulos. Por lo que la expresión x^2+y^2+1 es estrictamente positiva → $|M|\neq 0$ → Existe inversa independientemente del valor de x e y .

b) $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Empleo método directo para sacar la inversa:

$$M\cdot M^{-1}=I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando, llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$\left\{\begin{matrix} a-c=1 \\ b-d=0 \\ 2a+c=0 \\ 2b+d=1 \end{matrix}\right\}$ → De la segunda ecuación $b=d$ → Llevamos este resultado a la cuarta ecuación:

$$2b+b=1 \quad \rightarrow \quad b=\frac{1}{3} \quad , \quad d=\frac{1}{3}$$

De las ecuaciones primera y tercera obtenemos un sistema 2x2: $\left\{\begin{matrix} a-c=1 \\ 2a+c=0 \end{matrix}\right\}$ → $a=\frac{1}{3}$, $c=\frac{-2}{3}$

La matriz inversa queda: $M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9. Calcule los valores del parámetro t para los la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz es regular si admite inversa.
No es regular si no admite inversa. Y una matriz cuadrada no admite inversa si su determinante es cero.
Aplicamos Sarrus e igualamos a cero.

$$|A|=0+(t+1)(-t+1)\cdot 2-(t+1)(-t+1)-(0+(t+1)+t(t+1)(-t+1))$$
$$|A|=(t+1)(-t+1)-(t+1)-t(t+1)(-t+1)$$

Sacamos factor común:

$$|A|=(t+1)(-t+1-1-t(-t+1))=(t+1)(-t+t^2-t)=(t+1)(t^2-2t)=t(t+1)(t-2)$$
$$|A|=0 \quad \rightarrow \quad t=0 \quad , \quad t=-1 \quad , \quad t=2$$

Por lo tanto, no existe inversa si $t=0$, $t=-1$ o bien $t=2$.