Poligoni inscritti e circoscritti

Peluso Andrea 2T/A
(link geogebra «clicca qui»)

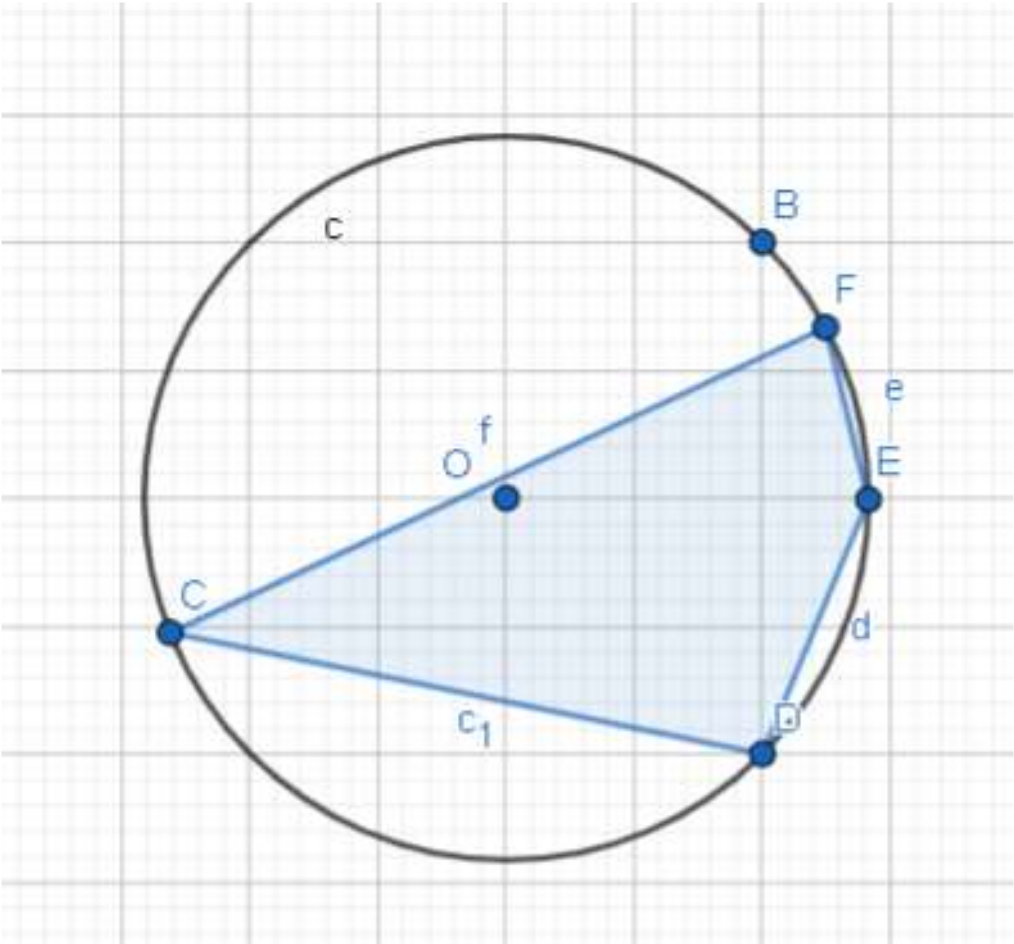
I Poligoni inscritti

- **Definizione**

  Un poligono è inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza. A sua volta la circonferenza è circoscritta al poligono.

- **Teorema**

  Condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono sia inscrivibile in una circonferenza è che gli assi dei suoi lati si incontrino tutti in uno stesso punto, che è il centro della circonferenza circoscritta.



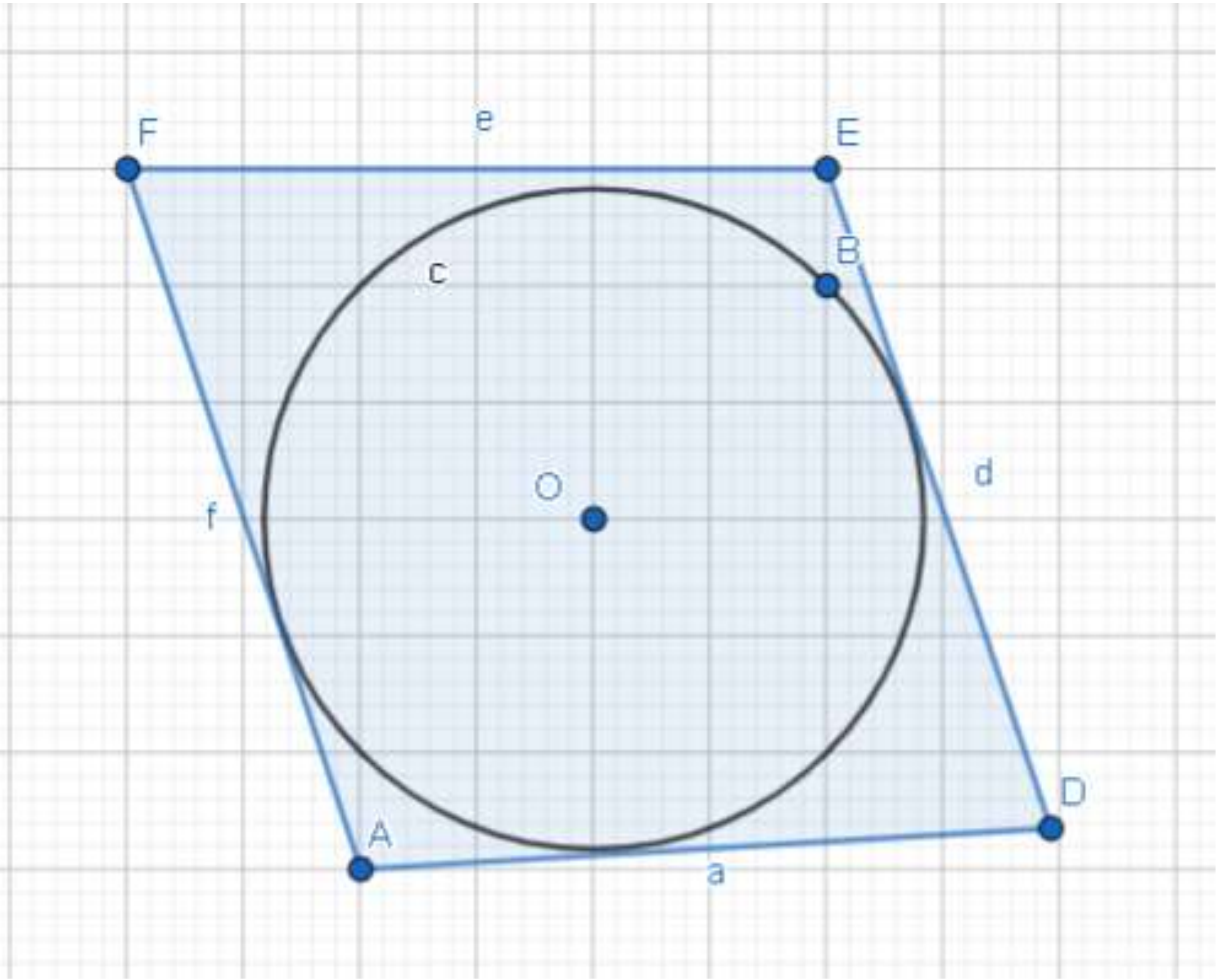
I POLIGONI CIRCOSCRITTI

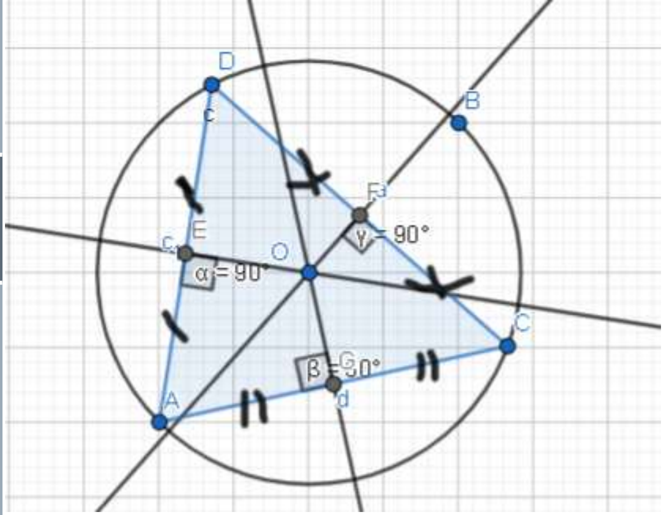
- **Definizione**

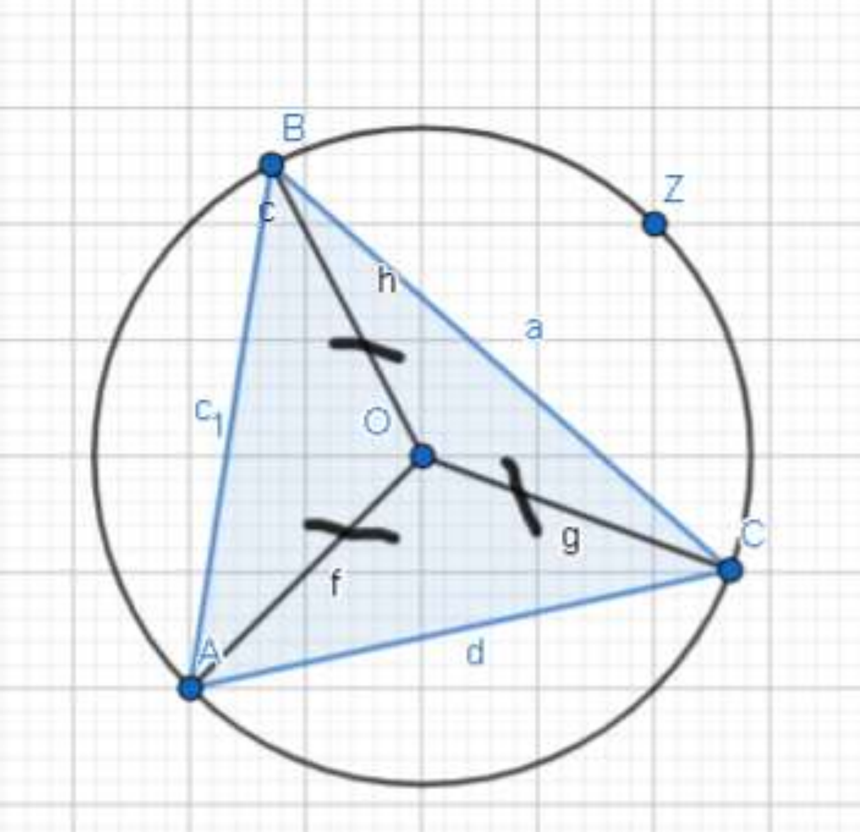
  Un poligono è circoscritto a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. A sua volta la circonferenza è inscritta nel poligono.

- **Teorema**

  Condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono sia circoscrivibile a una circonferenza è che le bisettrici dei suoi angoli si incontrino tutte in uno stesso punto, che è il centro della circonferenza inscritta.







Il circocentro

- **Teorema**

  Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, centro della circonferenza circoscritta.

- **Definizione**

  Il punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo si chiama circocentro ed è il centro della circonferenza circoscritta.

- **Dimostrazione**

  Sappiamo che per tre punti non allineati passa una circonferenza, quindi esiste la circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Inoltre, AO ≅ BO ≅ CO perché raggi, quindi O è equidistante dai punti A, B e C, perciò appartiene a r, s, t, assi dei segmenti AB, BC e AC. I triangoli sono dunque poligoni particolari, perché sono sempre inscrivibili in una circonferenza.

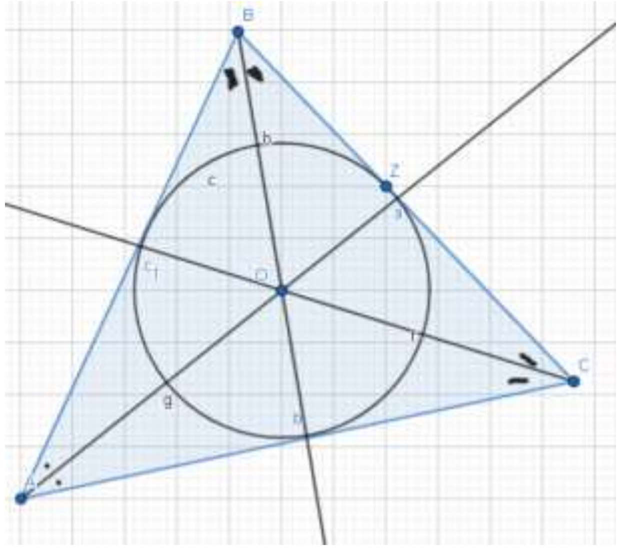
L’incentro

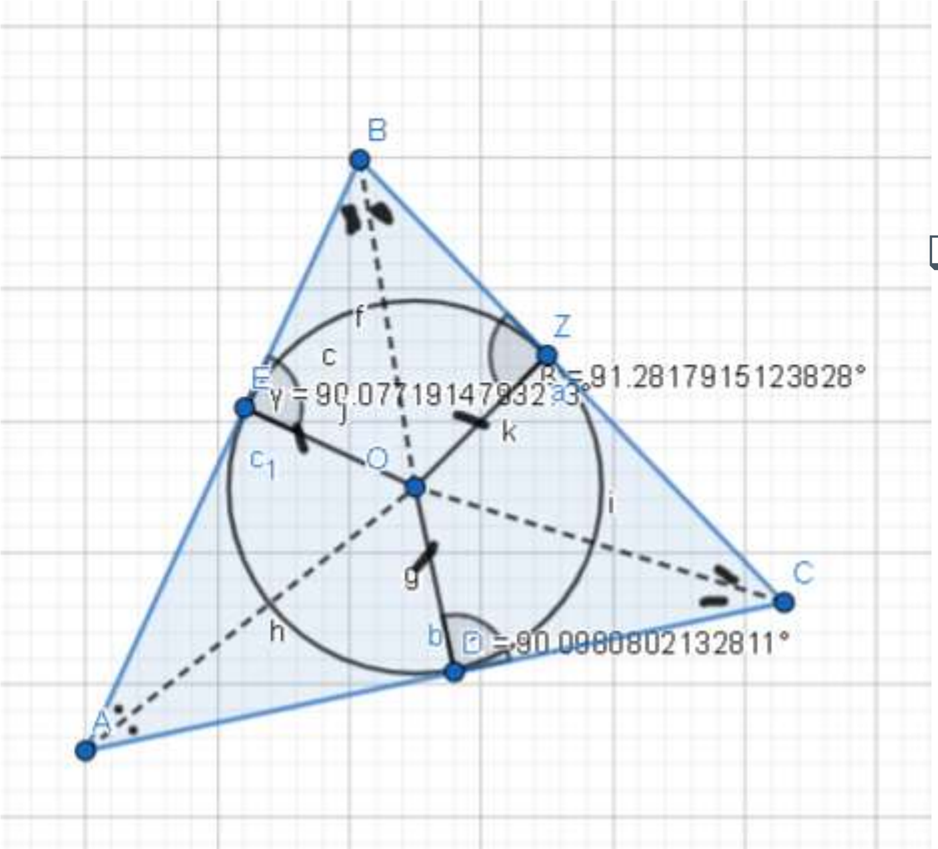
❖ Teorema

Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, centro della circonferenza inscritta.

❖ Definizione

Il punto di incontro delle bisettrici di un triangolo si chiama incentro ed è il centro della circonferenza inscritta.

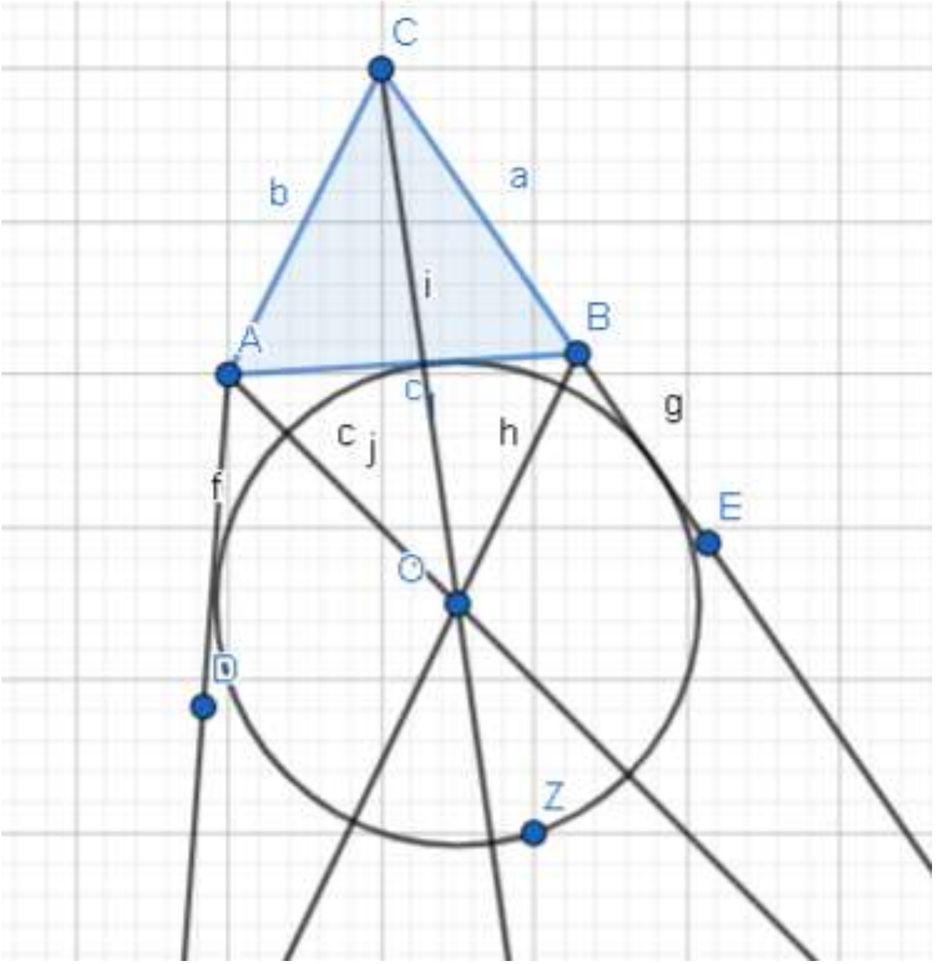




❑ Dimostrazione

Chiamiamo O il punto di incontro delle bisettrici di A e B. Da O tracciamo le perpendicolari ai lati AB, BC e AC e chiamiamo H, K e L i punti di intersezione. Poiché la bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell’angolo, OL ≅ OH perché O appartiene alla bisettrice di A e OH OK perché O appartiene alla bisettrice di B. Per la proprietà transitiva è anche OL≅ OK. O è pertanto equidistante dai lati dell’angolo C, quindi appartiene alla sua bisettrice. Le tre bisettrici si incontrano nello stesso punto O, e OH, OK e OL sono raggi della circonferenza inscritta nel triangolo.

L’excentro



- **Teorema**

  Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e la bisettrice dell’angolo interno non adiacente a essi si intersecano in uno stesso punto.

- **Definizione**

  Il punto di incontro delle bisettrici di due angoli esterni di un triangolo con la bisettrice dell’angolo interno non adiacente a essi si chiama excentro.

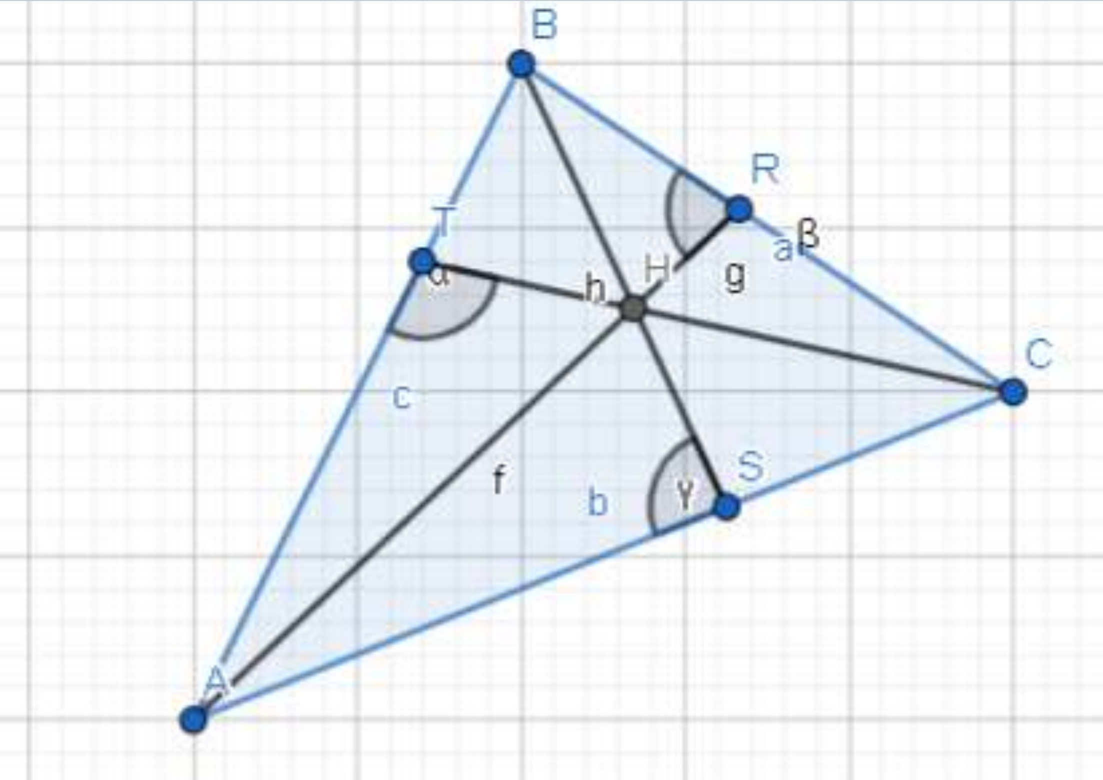
L'ORTOCENTRO

- **Teorema**

  Le rette a cui appartengono le altezze di un triangolo si intersecano in uno stesso punto.

- **Definizione**

  In un triangolo il punto di incontro delle rette a cui appartengono le altezze si chiama ortocentro.

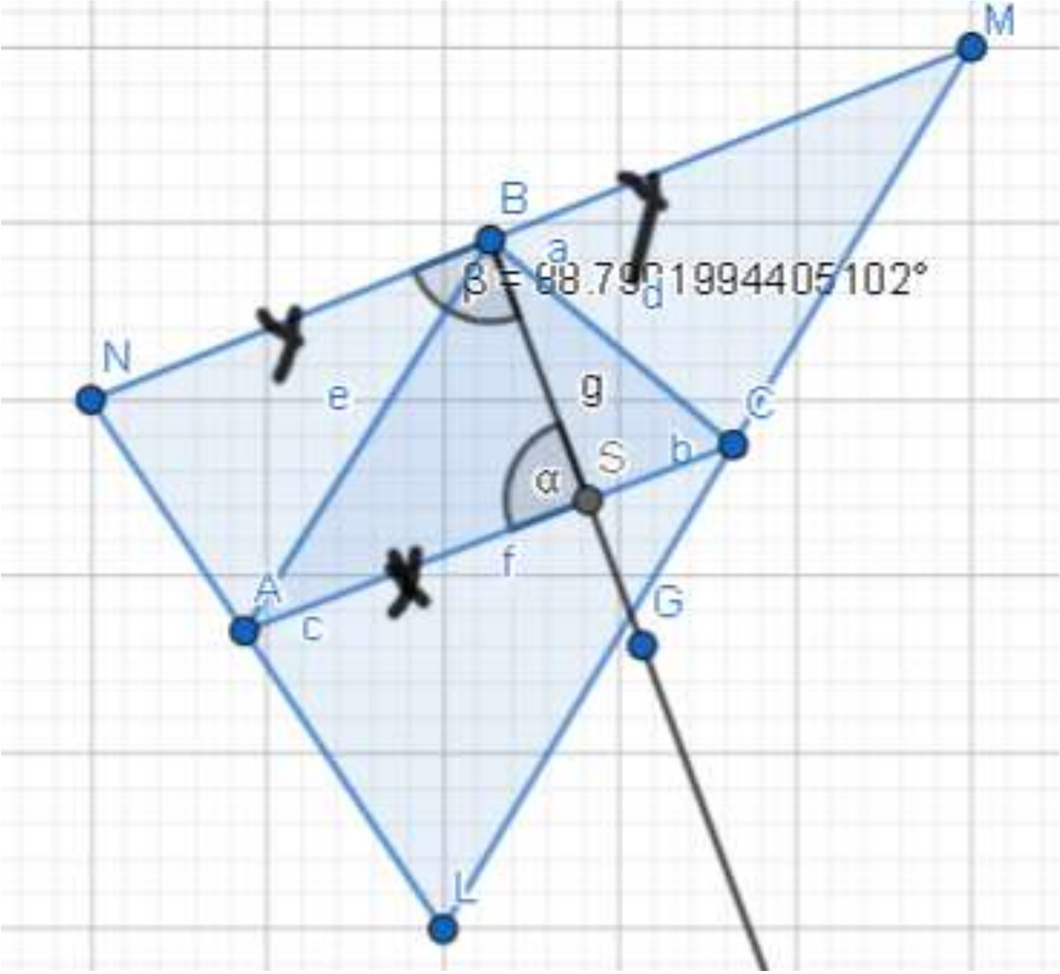


L’ORTOCENTRO - DIMOSTRAZIONE

Tracciamo per ognuno dei tre vertici A, B e C la parallela al lato opposto. Queste rette si incontrano a due a due in quanto rette parallele a rette incidenti. Chiamiamo L, M e N i punti di intersezione delle tre rette tracciate. I quadrilateri ANBC e ABMC sono parallelogrammi in quanto hanno i lati opposti paralleli a due a due per costruzione. Abbiamo quindi:

NB ≅ AC perché lati opposti del parallelogramma ANBC;

AC ≅ BM perché lati opposti del parallelogramma ABMC. Per la proprietà transitiva, NB ≅ BM, quindi B è il punto medio di NM. Tracciamo da B l’altezza BS relativa al lato AC: per definizione la retta BS è perpendicolare ad AC. Essendo AC // NM per costruzione, BS è perpendicolare anche a NM. BS è perpendicolare al segmento NM nel suo punto medio B, quindi è il suo asse. In modo analogo, tracciate da A l’altezza AR e da C l’altezza CT, si dimostra che: AR è asse del segmento NL; CT è asse del segmento LM. BS, AR e CT, rette delle altezze del triangolo ABC, sono anche gli assi del triangolo LMN, quindi si incontrano nello stesso punto, il circocentro di LMN.



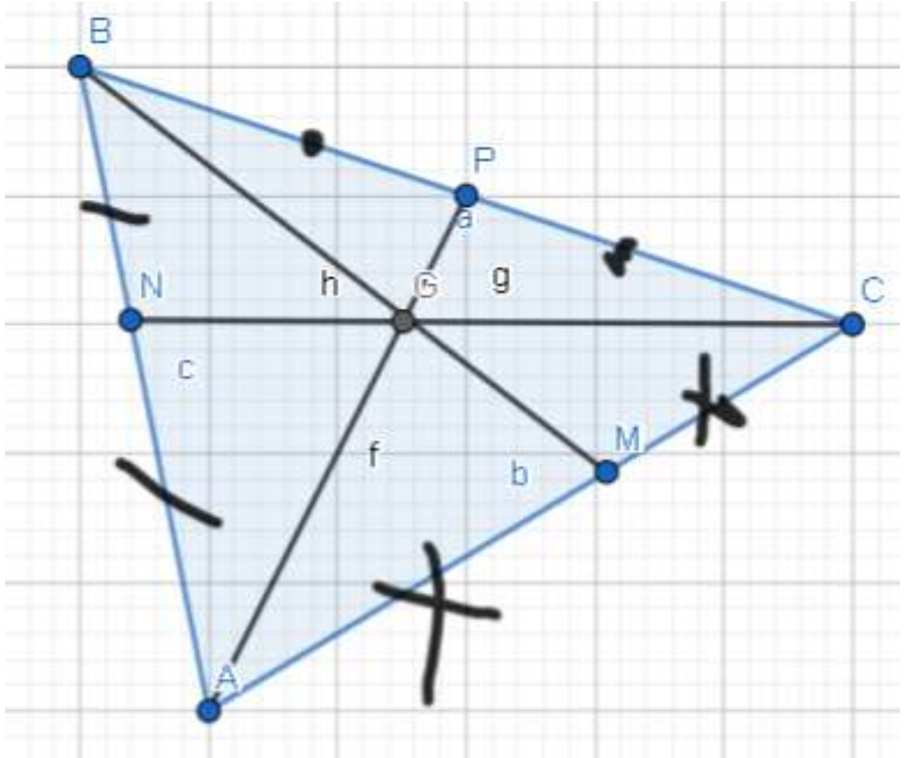
Il Baricentro

› **Teorema**

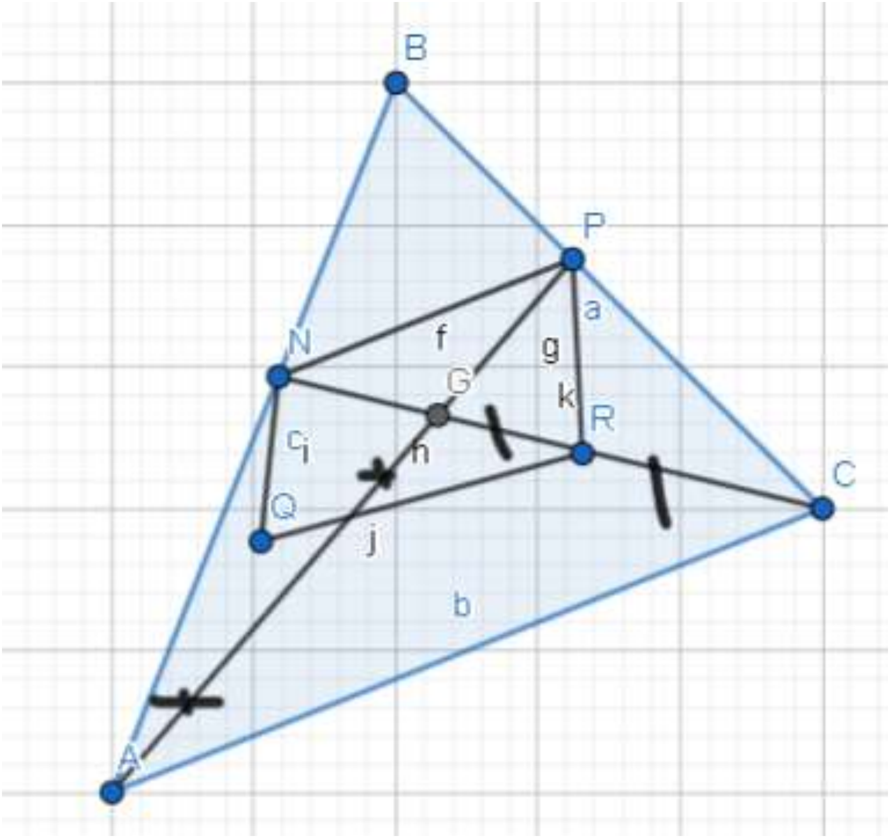
Le mediane di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, che divide ogni mediana in due segmenti di cui quello che ha un estremo in un vertice è doppio dell’altro.

› **Definizione**

Il punto di incontro delle mediane di un triangolo si chiama baricentro.



Il Baricentro - Dimostrazione



Dimostriamo che il punto di incontro di due mediane divide ognuna delle mediane in due parti una doppia dell’altra. Nel triangolo ABC il segmento NP congiunge i punti medi di due lati, quindi NP è parallelo ad AC e congruente alla sua metà, per la proprietà della congiungente dei punti medi dei lati di un triangolo. Nel triangolo AGC il segmento QR congiunge i punti medi di due lati, quindi QR è parallelo ad AC e congruente alla metà di AC, per la proprietà enunciata in precedenza. Il quadrilatero QNPR ha i due lati opposti NP e QR congruenti (entrambi metà di AC) e paralleli (entrambi paralleli ad AC), quindi è un parallelogramma. In un parallelogramma le diagonali si incontrano nel loro punto medio, quindi QG ≅ GP e RG ≅ GN. Per costruzione, Q è punto medio di AG, quindi AQ ≅ QG ≅ GP, pertanto AG ≅ 2GP. Analogamente, R è Punto medio di CG, quindi CR ≅ RG ≅GN, pertanto CG ≅ 2GN. Ripetendo lo stesso ragionamento con le mediane CN e BM, si deduce che anch’esse si intersecano in modo da dividersi in parti tali che quella che ha per estremo un vertice del triangolo ABC è doppia dell’altra. Dimostriamo che il punto di incontro delle mediane è uno solo. La mediana BM è divisa nello stesso modo sia dal punto di intersezione con AP, sia da quello di intersezione con CN, quindi AP e CN devono intersecare BM nello stesso punto G.

I quadrilateri inscritti pt.1

› **Teorema**

Gli angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono supplementari.

✓ **Dimostrazione**

Congiungiamo A e C con O, centro della circonferenza

Si formano due angoli al centro b1e d1

b e d sono angoli alla circonferenza che insistono sugli stessi archi su cui insistono rispettivamente b1 e d1, quindi:

2b≅B1, 2d ≅d1

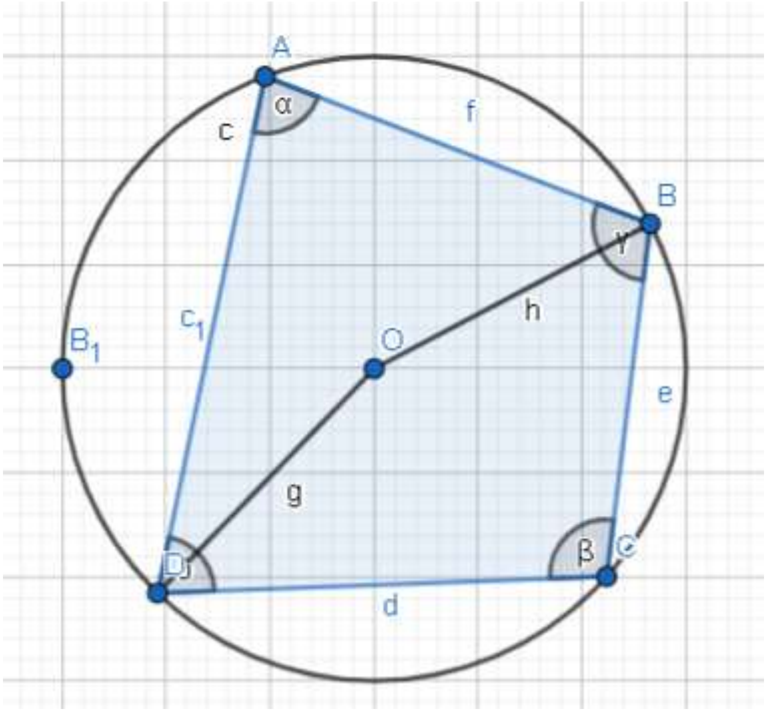
Sommiamo membro a membro: 2b + 2d ≅ b1+d1

Essendo b1 + d ≅ $(Pi - Greco)$e raccogliendo il fattore 2 al primo membro:$2(b + d) \cong 2(Pi - Greco) \rightarrow B + d \cong (Pi - Greco)$

Congiungiamo B e D con O e ripetiamo le stesse considerazioni $2(a + y) \cong 2(Pi - Greco) \rightarrow a + y \cong (Pi - Greco)$

Il teorema precedente è una condizione necessaria per l'inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza.

Si può dimostrare anche il teorema inverso, ossia la condizione sufficiente.



I quadrilateri inscritti pt.2

› **Teorema**

Se un quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari allora è inscrivibile in una circonferenza.

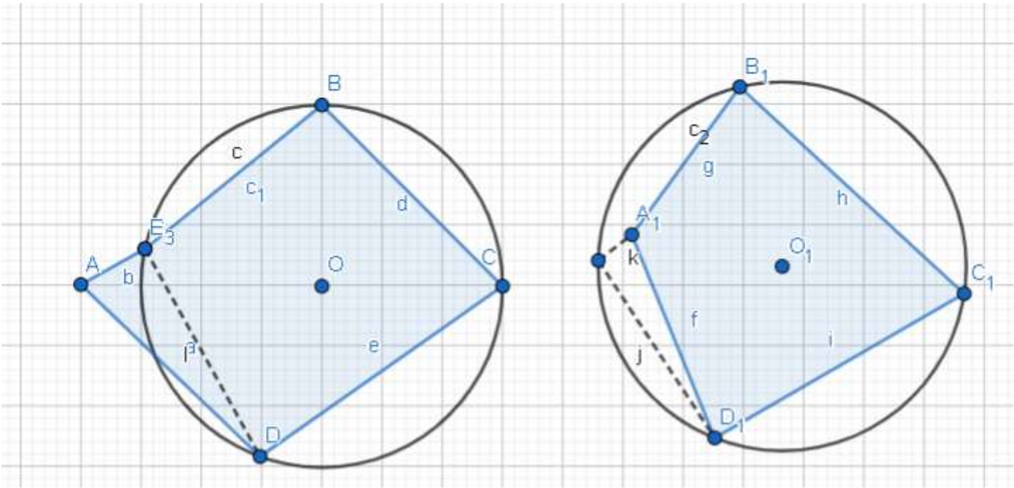
› **Dimostrazione**

Dobbiamo dimostrare che la circonferenza passante per B, C e D passa anche per A. Ragioniamo per assurdo. Se, per assurdo, la circonferenza per B, C e D non passa per A, si hanno due casi possibili. Osservando le figure notiamo che:

$BED + BCD \cong (Pi - Greco)$perchè angoli opposti in un quadrilatero inscritto in una circonferenza

$BAD + BCD \cong (Pi - Greco)$per ipotesi

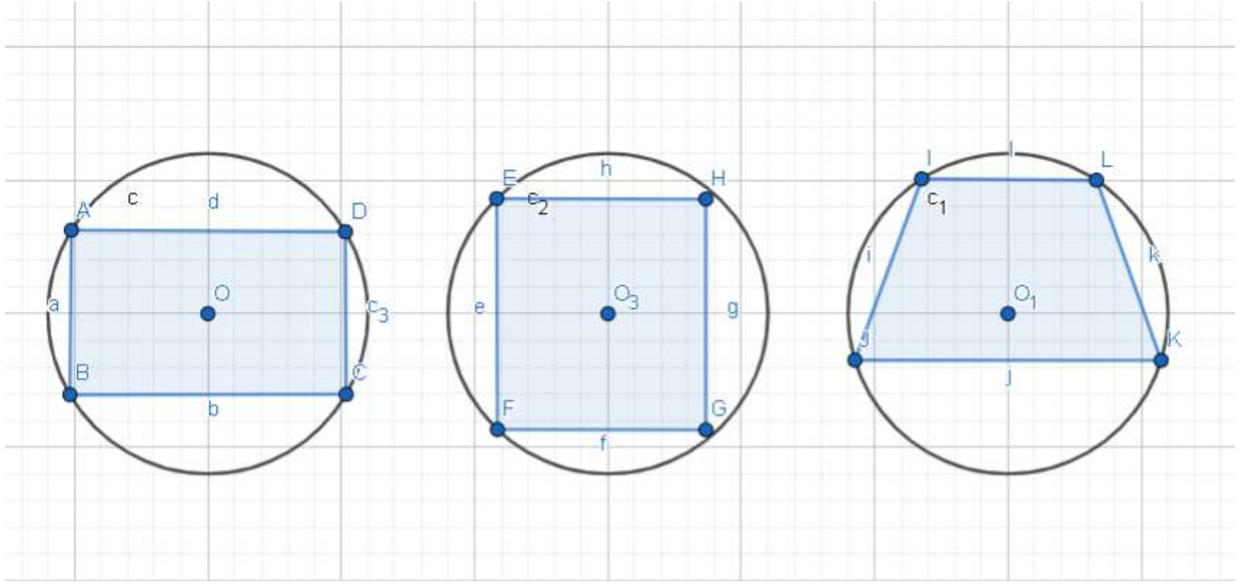
Quindi BED e BAD sono congruenti, perché supplementari dello stesso angolo. D'altra parte, essi sono angoli corrispondenti fra le rette DA e DE, tagliate dalla trasversale AE. Le rette DA e DE, avendo angoli corrispondenti congruenti, risultano parallele, e ciò è in contraddizione con il fatto che hanno in comune il punto D. Quindi la circonferenza deve passare anche per il punto A.



I quadrilateri inscritti pt.3

- **Teorema**

  Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che abbia gli angoli opposti supplementari.



I quadrilateri circoscritti pt.1

- **Teorema**

In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza, la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

- **Dimostrazione**

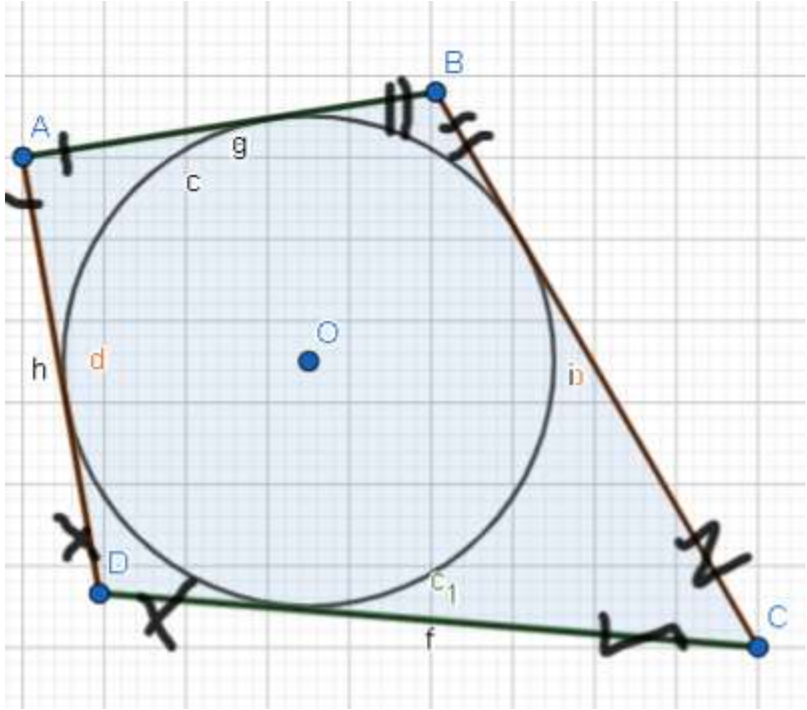
Chiamiamo H, K, I, L i punti di contatto tra i lati e la circonferenza. Se da un punto esterno a una circonferenza mandiamo le tangenti alla circonferenza, i segmenti di tangente sono congruenti, quindi possiamo scrivere:
$AL \cong AH \qquad LD \cong DI \qquad CK \cong IC \qquad KB \cong HB$

Sommando membro a membro otteniamo:
$$AL + LD + CK + KB \cong AK + HB + DI + IC$$

Sostituendo a ogni coppia di segmenti il segmento congruente otteniamo:

AD+CB ≅AB+DC

Il teorema precedente è una condizione necessaria per la circoscrivibilità di un quadrilatero a una Circonferenza.



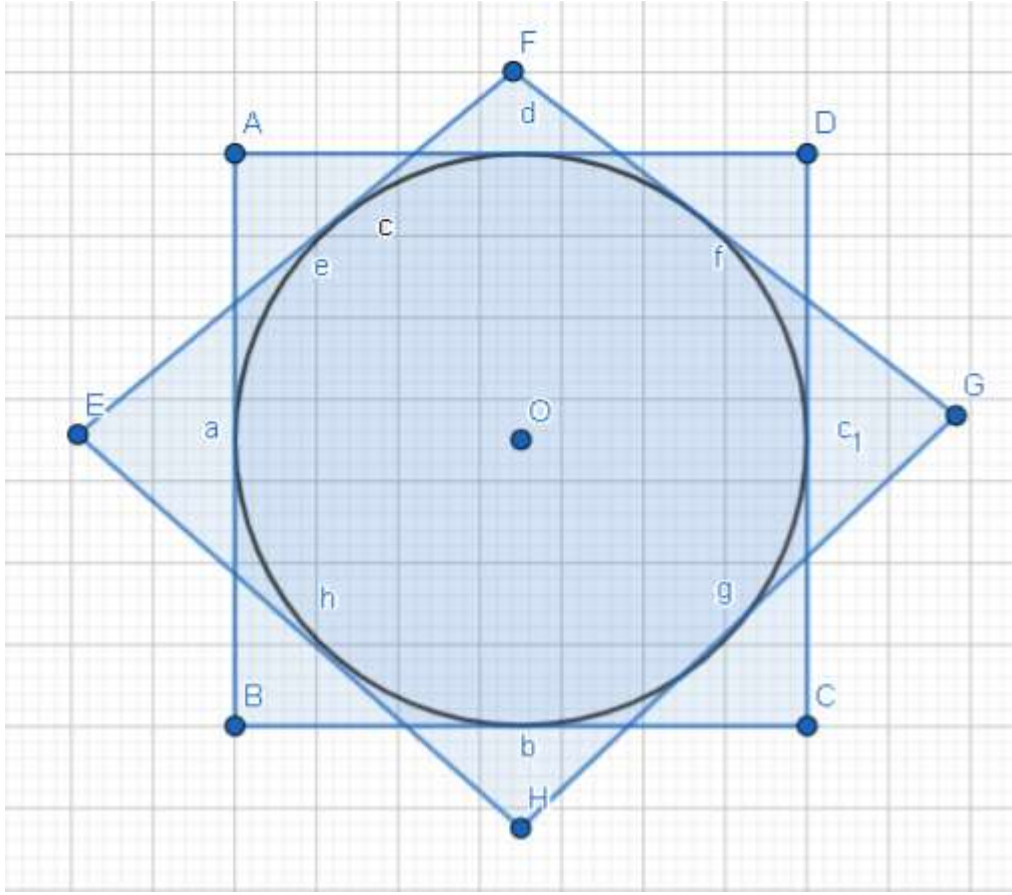
I quadrilateri circoscritti pt2 e 3

- **Teorema 2**

  Se in un quadrilatero la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, allora è possibile circoscrivere il quadrilatero a una circonferenza.

- **Teorema 3**

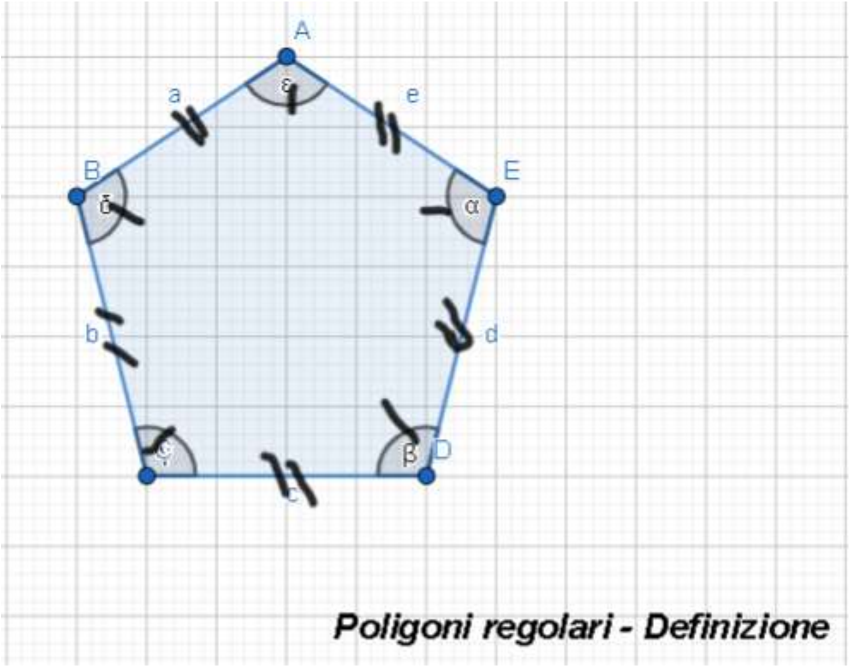
  Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che la somma di due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.



I poligoni regolari

- **Definizione**

  Un poligono è regolare quando ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti, cioè è sia equilatero sia equiangolo.



- **Teorema**

  Dato un poligono regolare, esistono la sua circonferenza inscritta e la sua circonferenza circoscritta, e hanno lo stesso centro.