Gleichung der Tangente

Gegeben:

- Funktion f, die in x_0 differenzierbar (linearisierbar) ist
- Berührpunkt $B = (x_0 \mid y_0) \in f$ und $B = (x_0 \mid y_0) \in t$

Gesucht: Gleichung der Tangente t im Punkt B

Wir wissen (LB41):

> **Definition:** Gegeben ist eine Funktion f, die auf dem Intervall I definiert ist, und eine Stelle a aus I. Wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ für $x \to a$ gegen einen **Grenzwert** strebt, so heißt f an der Stelle a **differenzierbar**. Dieser Grenzwert heißt **Ableitung von f an der Stelle a**.
> Man schreibt dafür **f′(a)** (lies: f Strich von a) sowie $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
>
> Die Gerade durch P(a | f(a)) mit der Steigung f′(a) heißt **Tangente** an den Graphen von f in P.

Ansatz einer linearen Funktion: $\boldsymbol{y = f'(x_0) \cdot x + c}$ (*)

- Punktprobe für B ist erfüllt ($B = (x_0 \mid y_0) \in t$):
  $y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + c$

Wie groß ist der y-Abschnitt c?

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + c \quad | - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$c = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

Eingesetzt in (*):

$$\boldsymbol{y} = f'(x_0) \cdot \boldsymbol{x} + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0.5x^3 + 0.5.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $B(2|f(2))$.

Lösung:

Ansatz: $t(x, x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Gegeben:

- Funktion f mit $f(x) = 0.5x^3 + 0.5$
- Berührpunkt B mit $B(2|f(2))$

Drei Schritte zum Ziel:

1. **Berechne $\boldsymbol{f(2)}$:**

$$\begin{aligned} f(2) &= 0.5 \cdot 2^3 + 0.5 \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

2. **Berechne $\boldsymbol{f'(2)}$:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.5 \cdot 3 \cdot x^2 \\ &= 1.5x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= 1.5 \cdot 2^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

3. **Setze $\boldsymbol{f(2)}$ und $\boldsymbol{f'(2)}$ in die Formel für $\boldsymbol{t}$ ein und vereinfache den rechten Term**.

$$\begin{aligned} t(x,2) &= f'(2) \cdot (x-2) + f(2) \\ &= 6(x-2) + 4.5 \\ &= \boldsymbol{6x - 7.5} \end{aligned}$$

Ergebnis:

Gleichung der Tangente in B: $t(x,2) = 6x - 7.5$

Kontrolle: