MATHE.FORSCHER

Entdecke Mathematik in deiner Welt

Entdecken. Erforschen. Erkennen.

Mathe.Forscher meets GeoGebra

Die Quadratpflanze

GeoGebra-Book zur Unterrichtseinheit:

https://www.geogebra.org/m/va8gpnxz

Autor: Martin Deckert

Didaktischer Kommentar

Die Lernumgebung ermöglicht einen **verständnisorientierten Zugang** zum Konzept „Grenzwerte“. Dabei erkunden die Schülerinnen und Schüler unter Verwendung der Geogebra-Applets am Beispiel der beschriebenen Quadratpflanze zunächst das Wachstum dieser geometrischen Figur, um dann im nächsten Unterrichtsschritt geeignete Betrachtung zum Verhalten der Umfangsfolge und Flächeninhaltsfolge anzustellen.

Die Beobachtungen und Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler beim Analysieren dieser Folge eignen sich zur **Einführung der Fachbegriffe** Konvergenz und Divergenz sowie den des Grenzwertes. Je nach Lernstand der Lerngruppe kann der Flächeninhaltgrenzwert mit dem Applet im 4. Abschnitt anschaulich begründet werden oder in Form einer geometrischen Reihe im Rahmen eines eigenen Unterrichtschritts formal bewiesen werden.

Abschnitt 5 bietet Impulse zum **forschenden Lernen**. Die drei dargestellten Variationsmöglichkeiten sollen den Schülerinnen und Schülern Anregung sein, um entweder eigene, weiterführende Fragestellungen zu entwerfen und sich auf den Weg nach deren Beantwortung zu machen oder durch Nutzung der Applets analoge Überlegungen zu Umfang, Flächeninhalt bzw. Oberfläche und Volumen bei der 3D-Würfelpflanze anzustellen. Interesse, Motivation der Lernenden und Impulse der Lehrkraft bedingen hier gemeinsam mit der zur Verfügung gestellten Unterrichtszeit die Intensität dieses letzten Schritts der Unterrichtsreihe. Die Präsentationen der Forschungsergebnisse durch die Schülerinnen und Schüler können die Unterrichtsreihe geeignet abschließen.

Lernvoraussetzung für diese Lernumgebung bilden Kenntnissen über Zahlenfolgen. Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits Bildungsvorschriften von Folgen (explizit und/oder rekursiv) erstellen können und Folgenglieder berechnen können. Eigenschaften von Folgen wie Beschränktheit und Monotonie sind keine notwendige Lernvoraussetzung. Kenntnisse über Reihen als Folge von Teilsummen können im Zuge der Behandlung von Abschnitt 3 hilfreich sein, um die Flächeninhaltsfolge als geometrische Reihe fachlich präzise behandeln zu können. Da der Begriff der Reihe allerdings in deutschen Lehrplänen und Bildungsplänen kaum noch vorzufinden ist, wird die Konvergenz der Flächeninhaltsfolge wohl zumeist auf der Grundlage eines **propädeutischen Grenzwertbegriff** behandelt werden. Eine anschauliche Begründung dafür ist in Abschnitt 4 dargestellt.

Die forschend-entdeckend angelegte Lernumgebung deckt eine Vielzahl der Mathe.Forscher-Dimensionen ab.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

Möglicher Gang durch die Unterrichtsreihe

Stunde	Applet	Inhalte	Didaktische Aspekte
1	Die Quadratpflanze erkunden	Beschreibung des Wachstums *(Anzahl neuer Quadrate, Seitenlänge eines neuen Quadrats, Flächeninhalt eines der neuen Quadrate)*	• Dynamische Visualisierung der Figur • Beschreiben ausgewählter Größen als Zahlenfolge
	Den Umfang der Quadratpflanze erforschen	Beschreibung des Umfangs als Zahlenfolge (in expliziter oder rekursiver Form) sowie Prognose des Verhaltens für große n	• Dynamische Sicht auf Umfang der Gesamtfigur • Beschreibung als Folge • Divergentes Verhalten der Folge lässt sich arithmetisch anhand der expliziten oder rekursiven Darstellungsform begründen
2	Den Flächeninhalt der Quadratpflanze erforschen	Betrachtung des Flächeninhalts und Beschreibung als Zahlenfolge (in expliziter oder rekursiver Form) sowie Prognose des Verhaltens für große n	• Dynamische Sicht auf Flächeninhalt der Gesamtfigur • Beschreibung als Summenfolge • Plausibilitätsüberlegung zum konvergenten Verhalten der Folge durch • Evtl. Darstellung der Folge als geometrische Reihe
3		Vergleich von Umfangsfolge und Flächeninhaltsfolge mit Analyse des Verhaltens für große n	• Einführung der Begriffe Konvergenz, Divergenz und Grenzwert • Ggf. Rückgriff auf andere Zahlenfolgen zur Festigung der Begriffsvorstellung
4	Den Grenzwert für den Flächeninhalt beweisen	Plausibilitätsüberlegung und anschauliche Begründung für den Grenzwert 1,5	• Alternative Darstellung des Grenzwerts 1,5 durch eine lineare statt Diagonalanordnung der Quadrate der Folgegenerationen • Ggf. algebraische Beweisführung als Grenzwert der zugehörigen geometrischen Reihe
5	Variationen der Quadratpflanze analysieren	Betrachtung möglicher Variationen und Entwicklung eigener Fragestellungen	• Vielfältige Herangehensweisen zulassen • Lernende zum Fragenstellen anregen • Konstruktiver Umgang mit Ideen der Lernenden
6 7		Beantwortung der individuellen Fragestellungen und Dokumentation der Lernprodukte in geeigneter Weise (Heft, Poster)	• Selbstdifferenzierung • Strukturelle und inhaltliche Hilfestellungen durch die Lehrkraft • Ggf. Entwicklung eigener GGB-Applets (sehr großer Zeitaufwand berücksichtigen)
8		Präsentationen der Lernprodukte der Schülerinnen und Schüler	• Festigung der Begriffe Konvergenz, Divergenz, Grenzwert • Analogiebildung • Metareflexion

I) Die Quadratpflanze erkunden – Lehrerblatt

Eine Quadratpflanze hat anfangs die Seitenlänge 1m. Sie wächst wie folgt:

Täglich kommt eine neue Generation neuer Quadrate hinzu. Die täglich hinzukommenden Quadrate haben jeweils nur noch ein Drittel der Seitenlänge der vorangegangenen Generation.

QR-Code Quadratpflanze erkunden

https://www.geogebra.org/m/qgzxpcwn

Über den Schieberegler Tag kannst Du Dir das Wachstum anschauen. Beobachte genau, wie die Pflanze wächst.

1. Beschreibe, wie es sich mit den neuen Quadraten, die pro Generation hinzukommen, verhält.
   (Anzahl neuer Quadrate, Seitenlänge eines neuen Quadrats, Flächeninhalt eines der neuen Quadrate)

   Die Zahl der hinzukommenden Quadrate beträgt 3, 9, 27, 81, usw. Es handelt sich um die Dreierpotenzen. Die Seitenlänge eines neuen Quadrats ist dabei immer ein Drittel der Seitenlänge eines Quadrats aus der vorangegangenen Generation. Damit beträgt der Flächeninhalt eines neuen Quadrats immer ein Neuntel des Flächeninhalts eines Quadrats der vorangegangenen Generation.

2. Erstelle eine Prognose, was passiert, wenn die Pflanze nach demselben Schema immer weiter wächst.

   Der steigenden Anzahl neuer Quadrate steht gegenüber, dass die Seitenlängen und Flächeninhalte dieser Quadrate immer kleiner werden. Daher sind hier recht unterschiedliche Vermutungen möglich. Es wird empfohlen, diese diskursiven Einschätzungen in einem Unterrichtsgespräch zu bündeln und als Motivation für die nächsten Lernabschnitte zu nutzen.

I) Die Quadratpflanze erkunden – Entdeckerblatt

Eine Quadratpflanze hat anfangs die Seitenlänge 1m. Sie wächst wie folgt:

Täglich kommt eine neue Generation neuer Quadrate hinzu. Die täglich hinzukommenden Quadrate haben jeweils nur noch ein Drittel der Seitenlänge der vorangegangenen Generation.

QR-Code Quadratpflanze erkunden

https://www.geogebra.org/m/qqzxpcwn

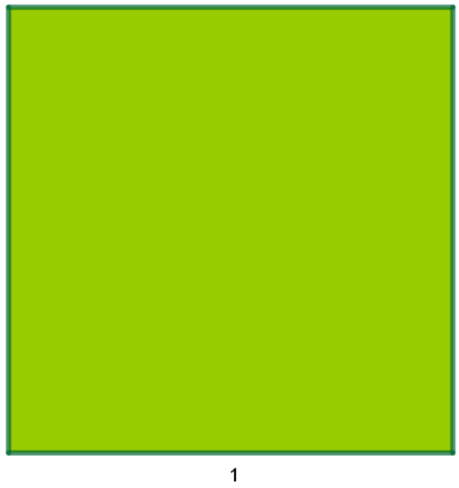
Über den Schieberegler Tag kannst Du Dir das Wachstum anschauen. Beobachte, wie die Pflanze wächst.

1. Beschreibe, wie es sich mit den neuen Quadraten, die pro Generation hinzukommen, verhält.
   (Anzahl neuer Quadrate, Seitenlänge eines neuen Quadrats, Flächeninhalt eines der neuen Quadrate)

2. Erstelle eine Prognose, was passiert, wenn die Pflanze nach demselben Schema immer weiter wächst.

II) Den Umfang der Quadratpflanze erforschen – Lehrerblatt

Wir betrachten den Umfang der Quadratpflanze im Laufe der Zeit



Tag n	1	2	3	4	5	6
Umfang U_n	4	6	8	10	12	14

QR-Code Umfang erforschen

https://www.geogebra.org/m/dxzvuatv

Am Tag 1 beträgt der Umfang der Pflanze 4.

Fülle die Tabelle aus. Du kannst über den Schieberegler die Pflanze vier Tage lang wachsen lassen. Stelle auch für den fünften und sechsten Tag eine Vermutung auf, wie sich der Umfang der Quadratpflanze weiterentwickelt.

1. Beschreibe die Gesetzmäßigkeit für den Umfang der Quadratpflanze.

   Der Umfang der Quadratpflanze wächst. Es gibt verschiedene Möglichkeiten (additiv oder subtraktiv), den Wert für U_n zu ermitteln. Fazit ist: Der Umfang wächst von Tag zu Tag um 2 LE.

2. Stelle eine Formel auf, mit der sich der Umfang am Tag n berechnen lässt.

   rekursiv: $U_{n+1} = U_n + 2$; $U_1=4$ explizit: $U_n = 2n+2$ (je nach Lernstand der SuS)

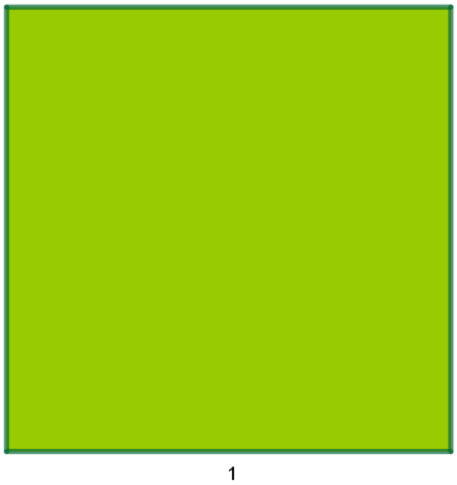
   Beide Darstellungen sind geeignet, um das Verhalten der Folge zu untersuchen.

3. Erkläre, wie sich der Umfang verhält, wenn die Quadratpflanze immer weiterwächst. Begründe Deine Aussage mathematisch.

   Die Folge U_n ist divergent. Hier bietet sich auch die propädeutische Einführung des Begriffs „divergent" an im Sinne eines Wachstums über alle Grenzen hinaus. Rückgriffe auf lineares Wachstum oder die Darstellung der Folgenglieder auf einer Geraden im Koordinatensystem können hilfreich sein. Anzuraten ist die ständige Bezugnahme zur Visualisierung der Randlinie.

II) Den Umfang der Quadratpflanze erforschen – Entdeckerblatt

Wir betrachten den Umfang der Quadratpflanze im Laufe der Zeit.



Tag n	1	2	3	4	5	6
Umfang U_n	4					

QR-Code Umfang erforschen

https://www.geogebra.org/m/dxzvuatv

Am Tag 1 beträgt der Umfang der Pflanze 4.

Fülle die Tabelle aus. Du kannst über den Schieberegler die Pflanze vier Tage lang wachsen lassen. Stelle auch für den fünften und sechsten Tag eine Vermutung auf, wie sich der Umfang der Quadratpflanze weiterentwickelt.

1. Beschreibe die Gesetzmäßigkeit für den Umfang der Quadratpflanze.

___

___

2. Stelle eine Formel auf, mit der sich der Umfang am Tag n berechnen lässt.

___

___

3. Erkläre, wie sich der Umfang verhält, wenn die Quadratpflanze immer weiterwächst. Begründe Deine Aussage mathematisch.

___

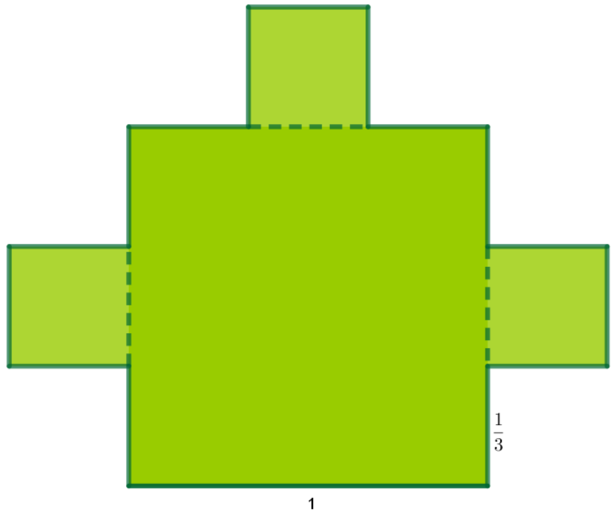
___

___

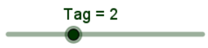
___

III) Den Flächeninhalt der Quadratpflanze erforschen – Lehrerblatt

Wir betrachten nun den Flächeninhalt der Quadratpflanze.



QR-Code Flächen-inhalt erforschen



https://www.geogebra.org/m/ncn7ckhw

Tag n	1	2	3	4	5	6
Flächeninhalt A_n	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{121}{81}$	$\frac{364}{243}$

Die Pflanze besitzt am ersten Tag den Flächeninhalt 1. Am zweiten Tag sind schon die drei kleineren Quadrate hinzugekommen und der Flächeninhalt hat ein wenig zugenommen.

Fülle die Tabelle aus. Wandle die Flächeninhalte in Brüche um und trage in die jeweiligen beiden Kästchen jeweils Zähler und Nenner ein. (Der Wert 1,5 wäre also beispielsweise als 3/2 einzutragen.)

Du kannst über den Schieberegler die Pflanze vier Tage lang wachsen lassen. Stelle auch für den fünften und sechsten Tag eine Vermutung auf, wie sich der Flächeninhalt der Quadratpflanze weiterentwickelt.

1. Beschreibe die Gesetzmäßigkeit für den Flächeninhalt der Quadratpflanze.

   Der Flächeninhalt wächst. Ausgehend von $A_1=1$ vergrößert er sich am Tag 2 um drei Quadrate, die jeweils den Flächeninhalt 1/9 haben. Somit $A_2 = 1+3*1/9 = 4/3$. Am 3. Tag kommen neun neue Quadrate hinzu, die jeweils den Flächeninhalt 1/81 haben, usw.

2. Stelle eine Formel auf, mit der sich der gesamte Flächeninhalt am Tag n berechnen lässt.

   rekursiv: $A_{n+1} = A_n + 1/3^n$; $A_1=1$ explizit: $A_n = 1+(1/3)+(1/3)^2+(1/3)^3+\ldots+(1/3)^{n-1}$

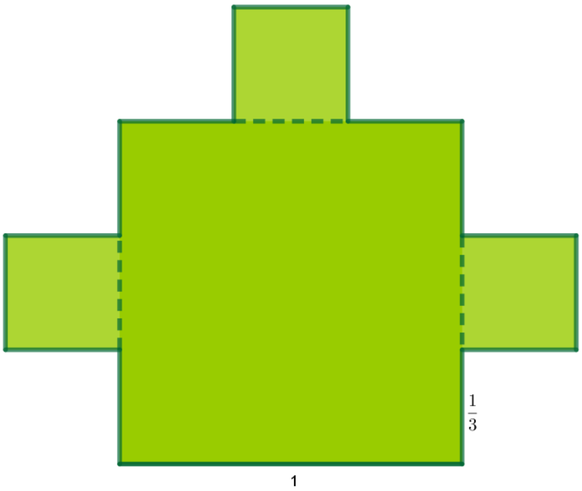
   Je nach Lernstand der SuS ist die geometrische Reihe auch mit Summenzeichen darstellbar. Vorwissen zur geom. Reihe ist dabei hilfreich (z.B. Märchen mit Reiskorn auf Schachfeld).

3. Erkläre, wie sich der Flächeninhalt verhält, wenn die Quadratpflanze immer weiterwächst. Begründe Deine Aussage mathematisch!

   Die Folge An ist konvergent. Betrachtungen erfolgen propädeutisch anhand Tabellen, Einsetzungen für große n oder eine grafische Darstellung. Die Folgenwerte nähern sich dem Wert 1,5.

III) Den Flächeninhalt der Quadratpflanze erforschen – Entdeckerblatt

Wir betrachten nun den Flächeninhalt der Quadratpflanze.



QR-Code Flächen-inhalt erforschen

Tag = 2

https://www.geogebra.org/m/ncn7ckhw

Tag n	1	2	3	4	5	6
Flächeninhalt A_n	1					

Die Pflanze besitzt am ersten Tag den Flächeninhalt 1. Am zweiten Tag sind schon die drei kleineren Quadrate hinzugekommen und der Flächeninhalt hat ein wenig zugenommen.

Fülle die Tabelle aus. Wandle die Flächeninhalte in Brüche um und trage in die jeweiligen beiden Kästchen jeweils Zähler und Nenner ein. (Der Wert 1,5 wäre also beispielsweise als 3/2 einzutragen.) Du kannst über den Schieberegler die Pflanze vier Tage lang wachsen lassen. Stelle auch für den fünften und sechsten Tag eine Vermutung auf, wie sich der Flächeninhalt der Quadratpflanze weiterentwickelt.

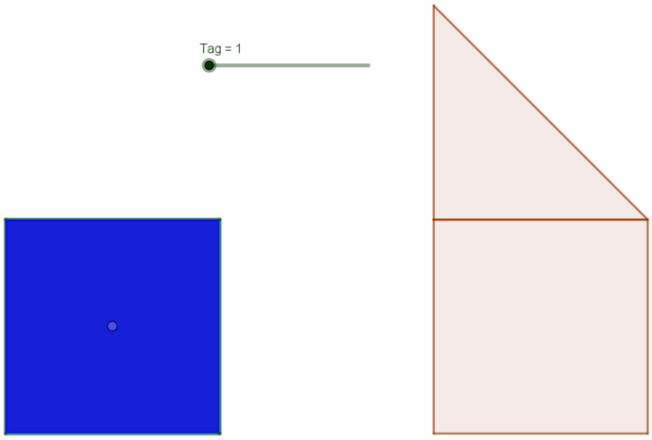
1. Beschreibe die Gesetzmäßigkeit für den Flächeninhalt der Quadratpflanze.

2. Stelle eine Formel auf, mit der sich der gesamte Flächeninhalt am Tag n berechnen lässt.

3. Erkläre, wie sich der Flächeninhalt verhält, wenn die Quadratpflanze immer weiterwächst. Begründe Deine Aussage mathematisch!

IV) Den Grenzwert für den Flächeninhalt illustrieren – Lehrerblatt

Im vorherigen Abschnitt hast Du ermittelt, dass die Folge A_n für den Flächeninhalt der Quadratpflanze am Tag n konvergent ist und den Grenzwert 1,5 besitzt. Dieser Wert wird nun durch die anderthalb rötlichen Quadrate verdeutlicht.



QR-Code Grenzwert illustrieren

https://www.geogebra.org/m/bthhvtab

Wir wollen zeigen, dass der Flächeninhalt der Quadratpflanze nie über diesen Wert hinauswächst, d.h. dass man alle einzelnen Quadrate der Quadratpflanze in den rötlichen Bereich mit Flächeninhalt 1,5 „hineinpuzzeln“ kann.

Gehe dabei Tag für Tag vor. Packe die Quadrate jeweils am blauen Punkt und verschiebe sie in die rötlichen Bereich. Los geht es am Tag 1 mit dem großen Quadrat mit Flächeninhalt 1 …

1. Mit welcher Strategie schaffst Du es, alle Quadrate der Pflanze unterzubringen?

   Durch dreiecksähnliche Gestalt: Die verbleibenden kleinen Dreiecke lassen sich dann jeweils mit drei Quadraten der nächsten Generation ausfüllen. Es bleiben wieder Dreiecke übrig, usw.

2. Sieh Dir im nächsten Applet eine animierte Lösung an und vergleiche diese mit Deiner Idee.

3. Erläutere, ob dieses Vorgehen auch für weitere Tage n=5,6,7,8,… erfolgreich wäre.

   Ja, weil die Seitenlänge jedes Dreiecks der nächsten Generation wieder ein Drittel der Seitenlänge der vorherigen Generation beträgt. So lassen sich jeweils drei neue Quadrate pro jedem freiem Dreieck unterbringen.

QR-Code Animation

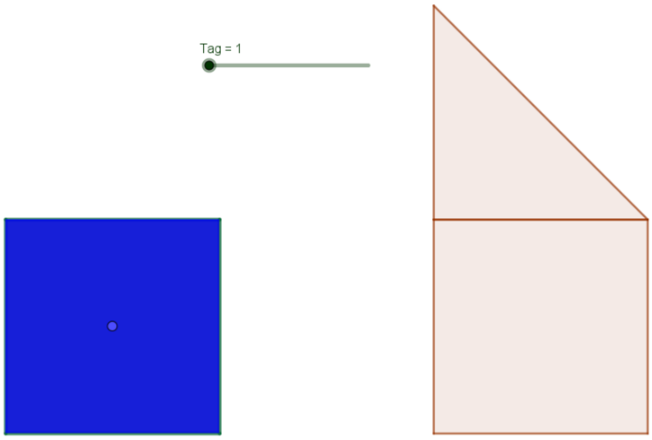
https://www.geogebra.org/m/vdeudheb

4. Finde weitere Möglichkeiten, wie man die Quadrate der verschiedenen Tage anordnen kann, um den Grenzwert 1,5 zu veranschaulichen.

   Dies kann man beispielsweise auch linear, indem man die neuen Quadrate jeweils stapelt und so eine lineare Konvergenz gegen den Wert 1,5 erhält. Abbildung: ….

IV) Den Grenzwert für den Flächeninhalt illustrieren – Entdeckerblatt

Im vorherigen Abschnitt hast Du ermittelt, dass die Folge A_n für den Flächeninhalt der Quadratpflanze am Tag n konvergent ist und den Grenzwert 1,5 besitzt. Dieser Wert wird nun durch die anderthalb rötlichen Quadrate verdeutlicht.



QR-Code Grenzwert illustrieren

https://www.geogebra.org/m/bthhvtab

Wir wollen zeigen, dass der Flächeninhalt der Quadratpflanze nie über diesen Wert hinauswächst, d.h. dass man alle einzelnen Quadrate der Quadratpflanze in den rötlichen Bereich mit Flächeninhalt 1,5 „hineinpuzzeln“ kann.

Gehe dabei Tag für Tag vor. Packe die Quadrate jeweils am blauen Punkt und verschiebe sie in die rötlichen Bereich. Los geht es am Tag 1 mit dem großen Quadrat mit Flächeninhalt 1 …

1. Mit welcher Strategie schaffst Du es, alle Quadrate der Pflanze unterzubringen?

____

____

2. Sieh Dir im nächsten Applet eine animierte Lösung an und vergleiche diese mit Deiner Idee.
3. Erläutere, ob dieses Vorgehen auch für weitere Tage n=5,6,7,8,… erfolgreich wäre.

QR-Code Animation

https://www.geogebra.org/m/vdeudheb

____

____

____

4. Finde weitere Möglichkeiten, wie man die Quadrate der verschiedenen Tage anordnen kann, um den Grenzwert 1,5 zu veranschaulichen.

____

____

V) Variationen der Quadratpflanze analysieren – Lehrerblatt

Mathematisches Forschen bedeutet, neue Fragen zu formulieren und sich auf den Weg nach deren Lösung zu machen. Neue Fragen ergeben sich, wenn das Beispiel Quadratpflanze variiert wird.

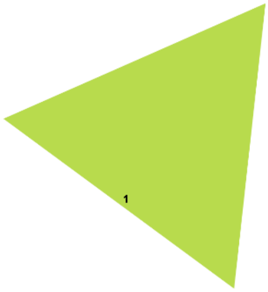
Hier sind drei mögliche Variationen:

- **Variation 1:** Was passiert, wenn der Streckfaktor der Quadrate der nächsten Generation nicht mehr ein Drittel ist, sondern ein anderer Faktor, z.B. 0,5?

QR-Code Variation Streckfaktor

https://www.geogebra.org/m/wtndytkr

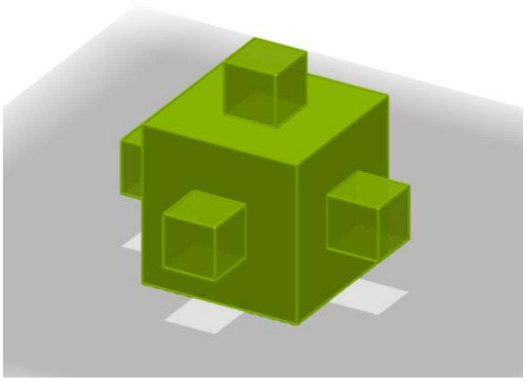
- **Variation 2:** Was passiert, wenn eine ähnliche Pflanze nicht quadratisch, sondern dreieckig wächst?



QR-Code Variation Figur

https://www.geogebra.org/m/a9nssadq

- **Variation 3:** Was passiert, wenn wir nicht eine Quadratpflanze in 2D sondern eine Würfelpflanze in 3D betrachten?



QR-Code Variation Dimension

https://www.geogebra.org/m/b3ubxkcu

Sicherlich fallen Dir auch noch weitere Fragen ein. Formuliere solche Ideen, wie man das Wachstum der Quadratpflanze variieren kann:

Mögliche Aspekte: Streckfaktor, Überlappung neuer Generationen, Form, Dimension, Kombination von Aspekten, …

Stelle für ausgewählte Fragen Vermutungen auf, wie sich Umfang, Flächeninhalt, Volumen, usw. verhalten. Vielleicht gelingt es Dir, auf einige Fragen passende Antworten zu finden.

https://www.geogebra.org/m/va8gpnxz

V) Variationen der Quadratpflanze analysieren – Entdeckerblatt

Mathematisches Forschen bedeutet, neue Fragen zu formulieren und sich auf den Weg nach deren Lösung zu machen. Neue Fragen ergeben sich, wenn das Beispiel Quadratpflanze variiert wird.

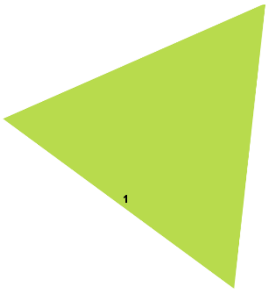
Hier sind drei mögliche Variationen:

- **Variation 1:** Was passiert, wenn der Streckfaktor der Quadrate der nächsten Generation nicht mehr ein Drittel ist, sondern ein anderer Faktor, z.B. ein Halb?

QR-Code Variation Streckfaktor

https://www.geogebra.org/m/wtndytkr

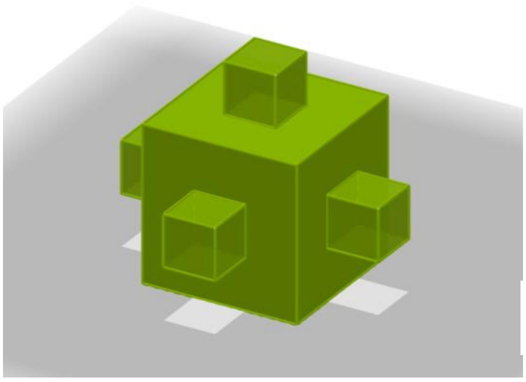
- **Variation 2:** Was passiert, wenn eine ähnliche Pflanze nicht quadratisch, sondern dreieckig wächst?



QR-Code Variation Figur

https://www.geogebra.org/m/a9nssadq

- **Variation 3:** Was passiert, wenn wir nicht eine Quadratpflanze in 2D sondern eine Würfelpflanze in 3D betrachten?



QR-Code Variation Dimension

https://www.geogebra.org/m/b3ubxkcu

Sicherlich fallen Dir auch noch weitere Fragen ein. Formuliere solche Ideen, wie man das Wachstum der Quadratpflanze variieren kann:

____

____

____

____

Stelle für ausgewählte Fragen Vermutungen auf, wie sich Umfang, Flächeninhalt, Volumen, usw. verhalten. Vielleicht gelingt es Dir, auf einige Fragen passende Antworten zu finden.

Übersicht QR-Codes / Links

1	https://www.geogebra.org/m/qgzxpcwn
2	https://www.geogebra.org/m/dxzvuatv
3	https://www.geogebra.org/m/ncn7ckhw
4	https://www.geogebra.org/m/bthhvtab
	https://www.geogebra.org/m/vdeudheb
5	https://www.geogebra.org/m/wtndytkr
	https://www.geogebra.org/m/a9nssadg
	https://www.geogebra.org/m/b3ubxkcu