Teoría – Tema 9

Teoría - 16 - Ángulo entre rectas. Bisectrices

Ángulo entre dos rectas

Llamamos ángulo α entre dos rectas r y s al menor de los ángulos que forman sus vectores directores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$.

Si las rectas son paralelas o coincidentes, el ángulo que forman entre si sus vectores directores es de 0^o ó 180^o .

Si las rectas son secantes o cruzadas, formarán cuatro ángulos entre si, iguales dos a dos. El menor de esos ángulos siempre es del primer cuadrante. Es decir: $\alpha \in [0^o, 90^o]$.

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}=\frac{|u_{r_x}\cdot u_{s_x}+u_{r_y}\cdot u_{s_y}+u_{r_z}\cdot v_{r_z}|}{\sqrt{u_{r_x}^2+u_{r_y}^2+u_{r_z}^2}\cdot\sqrt{u_{s_x}^2+u_{s_y}^2+u_{s_z}^2}} \rightarrow \alpha \equiv \text{ángulo formado por dos rectas}$$

Donde hemos tomado **valor absoluto en el numerador para garantizar que el ángulo obtenido sea del primer cuadrante** y, por lo tanto, sea el menor de los ángulos formado por ambas rectas.

Si ambas rectas son perpendiculares, el ángulo que forman es de 90^o , por lo que el producto escalar es de sus vectores directores es 0 .

$$Si \quad \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \rightarrow \vec{u}_r\cdot\vec{u}_s=0 \rightarrow u_{r_x}\cdot u_{s_x}+u_{r_y}\cdot u_{s_y}+u_{r_z}\cdot v_{r_z}=0$$

Ejemplo 1 resuelto

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{4}$.

La recta r tiene como vector director $\vec{u}_r=(2,-3,4)$. Y si obtenemos un $B\in r$ que cumpla $\vec{AB}\perp\vec{u}_r$ (el producto escalar de ambos vectores igual a 0), ese vector $\vec{AB}$ será el vector director de la recta s .

$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{4}$ → Pasar a paramétrica → $r:\left\{\begin{array}{c} x=1+2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=-3+4\lambda \end{array}\right\}$ → De aquí tomamos las coordenadas del punto $B(1+2\lambda,-3\lambda,-3+4\lambda)$ → $\vec{AB}=(2\lambda,1-3\lambda,-5+4\lambda)$

Aplicamos la definición de producto escalar y lo anulamos.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{AB} = 0 \;\rightarrow\; (2,-3,4)\cdot(2\lambda, 1-3\lambda, -5+4\lambda)=0$$

$$4\lambda-3+9\lambda-20+16\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{23}{29}$$

$$\vec{AB}=\left(\frac{46}{29}, \frac{-40}{29}, \frac{-53}{29}\right)$$

Podemos simplificar a un vector director más sencillo → $\vec{u}_s=(46,-40,-53)$

Y podemos escribir la recta solución de la forma:

$$s: \frac{x-1}{46}=\frac{y+1}{-40}=\frac{z-2}{-53}$$

Bisectriz de dos rectas que se cortan

Sean las rectas secantes r y s que se cortan en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, y de ecuaciones vectoriales:

$$r:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_r \cdot \vec{u}_r$$
$$s:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_s \cdot \vec{u}_s$$

Las dos rectas, al cortarse, sabemos que forman cuatro ángulo iguales dos a dos. Por lo tanto, tendremos dos bisectrices (recuerda que una bisectriz es un recta que divide a un ángulo en dos partes iguales).

Analiticamente podemos definir la bisectriz como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las dos rectas dadas. Y podemos calcular ambas bisectrices tomando vectores directores de las dos rectas con mismo módulo, y sumarlos y restarlos desde el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ para obtener las ecuaciones de las dos rectas bisectrices.

Es decir:

$$r:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_r \cdot \vec{u}_r \quad \rightarrow \text{Vector director unitario} \rightarrow \quad \hat{u}_r=\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}$$

$$s:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_s \cdot \vec{u}_s \quad \rightarrow \text{Vector director unitario} \rightarrow \quad \hat{u}_s=\frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$$

$$Bisectriz \quad 1:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_1(\hat{u}_r+\hat{u}_s)$$
$$Bisectriz \quad 2:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_2(\hat{u}_r-\hat{u}_s)$$