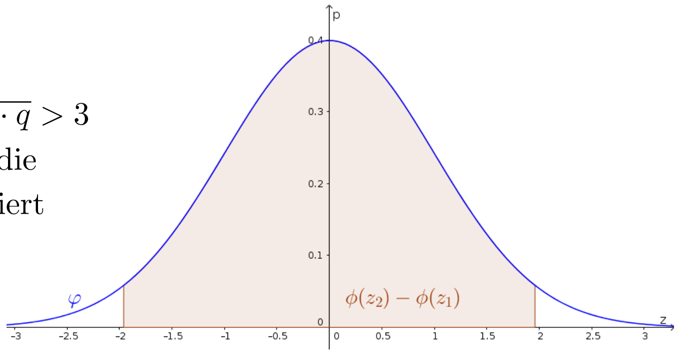
Normalverteilung



Bei erfüllter Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$ können Binomialwahrscheinlichkeiten über die Normalverteilungsfunktion $\frac{1}{\sigma} \cdot \varphi$ approximiert werden. Die <u>Standard</u>normalverteilungsfunktion ist $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Der Wert für z errechnet sich gemäß der σ-Umgebung um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ mit $k = \mu + z \cdot \sigma \Leftrightarrow z = \frac{k-\mu}{\sigma}$.

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten werden über die Gauß'sche Integralfunktion Φ berechnet, welche Stammfunktion der Standardnormalverteilungsfunktion ist und tabellarisch gegeben ist. Hierbei wird noch bei der Berechnung von z eine Stetigkeitskorrektur von 0,5 im Zähler eingefügt, welche einer halben Säulenbreite im Binomialverteilungsdiagramm entspricht.

<u>einzelne Wahrscheinlichkeit:</u>

Genau k Treffer aus n unabhängigen Versuchen
bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p (Ziehen mit Zurücklegen):

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(\tfrac{k-\mu}{\sigma})$$

<u>kumulierte Wahrscheinlichkeit:</u>

Höchstens k Treffer aus n unabhängigen Versuchen
bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p:

$$F(n;p;k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0{,}5}{\sigma}\right)$$

<u>Wahrscheinlichkeiten von-bis:</u>

Mindestens a und höchstens b Treffer aus n unabhängigen Versuchen
bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p:

$$F(n;p;a \leq k \leq b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \approx \Phi\left(\frac{b-\mu+0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-0{,}5}{\sigma}\right)$$

(Integralgrenzen jeweils nach außen gerundet, deswegen einmal plus und einmal minus 0,5)

<u>Beispiel:</u>

Mindestens 90 und höchstens 110 Treffer aus 230 unabhängigen Versuchen
bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit von 43%. Lösung per TR und Tabelle:

$$\sigma = \sqrt{230 \cdot 0,43 \cdot 0,57} \approx 7,5082 > 3 \qquad \mu = 230 \cdot 0,43 = 98,9$$

$$z_1 = \frac{90-98{,}9-0{,}5}{7{,}5082} \approx -1,25 \qquad z_2 = \frac{110-98{,}9+0{,}5}{7{,}5082} \approx 1,54$$

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi(1,54) - \Phi(-1,25) \approx 0,9382 - 0,1056 = 0,8326 = 83,26\%$$