

Esercizi

Esercizio 1. Determina i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che i due vettori $\mathbf{v} = (a, 2, b)$ e $\mathbf{u} = ((1 - b), b, 2)$ abbiano la stessa direzione.

Esercizio 2. Siano $A(1, 2, 3)$ e $B(-2, 0, -1)$ due punti in \mathbb{R}^3 . determina la lunghezza del segmento AB ed il suo punto medio.

Esercizio 3. Trova l'angolo tra i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$.

Esercizio 4. Determina l'equazione della retta passante per i punti \mathbf{A} e \mathbf{B} dell'esercizio 2. sia in forma vettoriale che parametrica.

Esercizio 5. Trova un vettore che abbia la stessa direzione della retta $y = -2x + 1$

Esercizio 6. Prova che i due vettori $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ e $\mathbf{v} = (-3/2, 0, 1)$ sono perpendicolari. Trova quindi un'equazione parametrica delle rette con direzione \mathbf{u} e \mathbf{v} passanti per il punto $P(2, 2, 2)$. Posso trovare due rette con direzione \mathbf{u} e \mathbf{v} che non hanno punti di intersezione? Se sì, trova anche le equazioni.

Esercizio 7. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{w} = (2, -1, -1)$, determina il valore dei tre parametri k_1, k_2, k_3 affinché la combinazione lineare $k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} + k_3\mathbf{w}$ permetta di ottenere il punto $P(2, 3, 4)$.

Esercizio 8. Quale direzione ha la retta \mathbf{r} di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad ?$$

Trova due punti per cui passa r e descrivila con un'altra equazione parametrica.

Esercizio 9. Verifica che i punti $A(1, 2, 1)$, $B(3, 0, 4)$ e $C(5, -2, 7)$ sono allineati.

Esercizio 10. Trova l'equazione di una retta passante per $A(2, -3, -1)$ parallela all'*asse delle y*.

Esercizio 11. Rappresenta nel piano i vettori di norma $\sqrt{5}$ perpendicolari al vettore $\mathbf{u} = (-4, -2)$.

Esercizio 12. Determina l'equazione cartesiana della retta r passante per il punto $P_0(2, 3)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{u} = (-2, 3)$.

Esercizio 13. Risolvi l'**esercizio 12** utilizzando il prodotto scalare e utilizzando come vettore perpendicolare $\mathbf{u} = (a, b)$ e punto di passaggio $P_0(x_0, y_0)$. Cosa rappresentano i coefficienti di x e y nella equazione cartesiana che hai trovato?

Esercizio 14. Considera un cubo di lato $\mathbf{1}$ con un vertice nell'origine e spigoli coincidenti con gli assi. Determina l'equazione della retta passante per il punto $P(1, 2, 3)$ e con direzione la diagonale del cubo.

Esercizio 15. Verificare che le equazioni $r_1 : (1, -3) + (2, -2)t$ e $r_2 : (3, -5) + (-1, 1)s$ descrivono la stessa retta e ricavarne l'equazione cartesiana.

Esercizio 16. Determina l'equazione del piano perpendicolare alla retta:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad \text{e passante per il punto: } P_0 = (-2, 3, 3).$$

Esercizio 17. Determina un'equazione parametrica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

(*Scientifico sessione suppletiva 2015*)

Esercizio 18. Trova il punto di intersezione fra la retta:

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2t \\ z = -5 + 8t \end{cases} \quad \text{ed il piano: } x + y + z = -1.$$

Esercizio 19. Trova il vettore normale al piano $\alpha : x + y + z = -1$

Esercizio 20. determina l'equazione del piano passante per i tre punti: $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(1, 0, 2)$

Esercizio 21. Nello spazio \mathbb{R}^3 , si considerino i punti A , B e C di coordinate rispettivamente $A(3, 1, 0)$, $B(4, 0, -1)$, $C(7, -3, -4)$. Stabilisci se la proposizione “Esiste un unico piano π passante per A , B e C ” è vera o falsa, motivando opportunamente la tua risposta

Esercizio 22. verifica che i due piani di equazioni: $2x - y - 6 = 0$ e $x + z = 4$ hanno in comune una retta e calcolane un'equazione in forma parametrica

Esercizio 23. scrivi una procedura per valutare se una retta r dello spazio \mathbb{R}^3 appartiene ad un piano π Supponi di conoscere sia l'equazione della retta che quella del piano.

Esercizio 24. Trovare la proiezione del punto $P_0(1, 0, 1)$ sulla retta:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizio 25. Perché il problema seguente non ammette soluzione unica?

Determina l'equazione del piano passante per il punto $P(1, 2, 3)$ e parallelo alla retta $r: (2, -1, 0) + t(-2, -3, -4)$.

Motiva opportunamente la tua risposta.

Esercizio 26. Date le due rette $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano α passante per P e parallelo alle due rette. (*Scientifico sessione 2016*)

Esercizio 27. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano β di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0$$

determina per quali valori di k la retta r ed il piano β sono paralleli, e la distanza tra di essi. (*Scientifico sessione 2015*)

Esercizio 28. nello spazio \mathbb{R}^3 sono dati i due piani α e β rispettivamente di equazione:

$$\alpha) x - 3y + z - 5 = 0$$

$$\beta) x + 2y - z + 3 = 0$$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione:

$$3x + y - z + 1 = 0$$

Esercizio 29. Determina la distanza fra il punto $P(2, 1, 1)$ e la retta:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$